

**UNIVERSIDAD DE SANTANDER**

**ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS**

**DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS**

**DEPARTAMENTO DE ANALISIS DE LAS ESTRUCTURAS**

**CATEDRA DE CALCULO DE ESTRUCTURAS**

**CALCULO MATRICIAL DE**

**ESTRUCTURAS**

**problemas**

**AVELINO SAMARTIN QUIROGA  
J.R. GONZALEZ DE CANGAS  
LUIS MORENO GARCIA  
JAVIER TORRES RUIZ**

**PUBLICACION : AE - 80.1**

**1980**



# índice

1. Planteamiento general.
2. Matriz de rigidez de elementos.
3. Matriz de rigidez de estructuras.
4. Cálculo de estructuras. Condiciones de borde.
5. Problemas especiales. Nudos de dimensión finita.
6. Cálculo del grado de hiperestatismo.
7. Sistemas básicos.
8. Cambio de bases.
9. Elementos finitos triangulares y cuadrangulares  $C^0$ .
10. Elementos finitos triangulares y cuadrangulares  $C^1$ .



# presentación

El Cálculo matricial de estructuras corresponde a un planteamiento moderno y original-en su acepción más genuina del término, de vuelta a los orígenes- del Análisis de Estructuras. Su desarrollo y por lo tanto aprendizaje más eficaz, se realiza con la ayuda de un computador. Sin embargo, relegar al estudiante al simple papel de usuario de programas generales de cálculo de estructuras por computador, que puede utilizar como una misteriosa caja negra, sin comprensión de sus fundamentos, parece una penosa y poco formativa perspectiva educacional. Por otra parte, el desarrollo por el alumno de pequeños programas de cálculo, permite una adecuada y natural asimilación de algunos conceptos del cálculo matricial de estructuras, si bien exige un previo conocimiento de procedimientos numéricos e informativos, y particularmente, un esfuerzo, a veces, desproporcionado para un estudiante que sólo desea comprender pero no desarrollar nuevos programas de cálculo. En esta publicación, se intenta un camino intermedio, en donde se da especial énfasis a los conceptos fundamentales de matriz de rigidez y cargas equivalentes de elementos y subestructuras. Conceptos que son útiles, y prácticos, tanto para el futuro usuario como al realizador de programas. Este hecho se puede comprobar en los modernos programas generales donde existen facilidades de subestructuración a diferentes niveles. Además se incluyen aquí simples problemas de análisis matricial de estructuras que se plantean de un modo manual y que no precisan para su resolución necesariamente un computador. Por último, se muestran ejemplos de uso de un programa general de computador implementado en el Centro de Cálculo de la Universidad de Santander.

Con esta publicación creemos, que se intenta cubrir un importante vacío en el campo del análisis matricial de estructuras, en donde existen excelentes libros de exposición teórica de los métodos -flexibilidad, rigidez, mixtos, híbridos, etc.- pero que carecen de esa intención de acercar el -- frecuentemente distante planteamiento general matricial al alumno.

Los problemas presentados son fruto, de la experien  
cia docente en la Cátedra de Cálculo de Estructuras, y corres  
ponden a prácticas, exámenes o explicaciones en clases. No se  
han tratado, dada la limitación del curso otros métodos dis--  
tintos al método del equilibrio o de los movimientos. Sin em-  
bargo se esperan introducir algunos ejemplos, de estos méto--  
dos. Esta publicación, corresponde a una continuación del es-  
fuerzo que la Cátedra está realizando con objeto de poner a -  
disposición de los alumnos de la E.T.S. de Ingenieros de Camini  
nos, Canales y Puertos de Santander de aquellas ayudas que --  
les permitan una más fácil y eficaz asimilación de los concepti  
tos más importantes del Cálculo matricial de estructuras. Ese  
ha sido nuestro propósito, y nuestra mejor recompensa sería -  
el haberlo logrado. En cualquier caso, se desea, ya desde ahora  
ra, recoger en futuras ediciones, aquellas posibles correccione  
s y mejoras que a lo largo de los sucesivos cursos aparezc--  
can.

A. Samartín.

Ejercicio E 1.1.

Numerar las estructuras de la figura E 1.1a de modo que el ancho de banda sea mínimo. Se supone estructuras de barras.

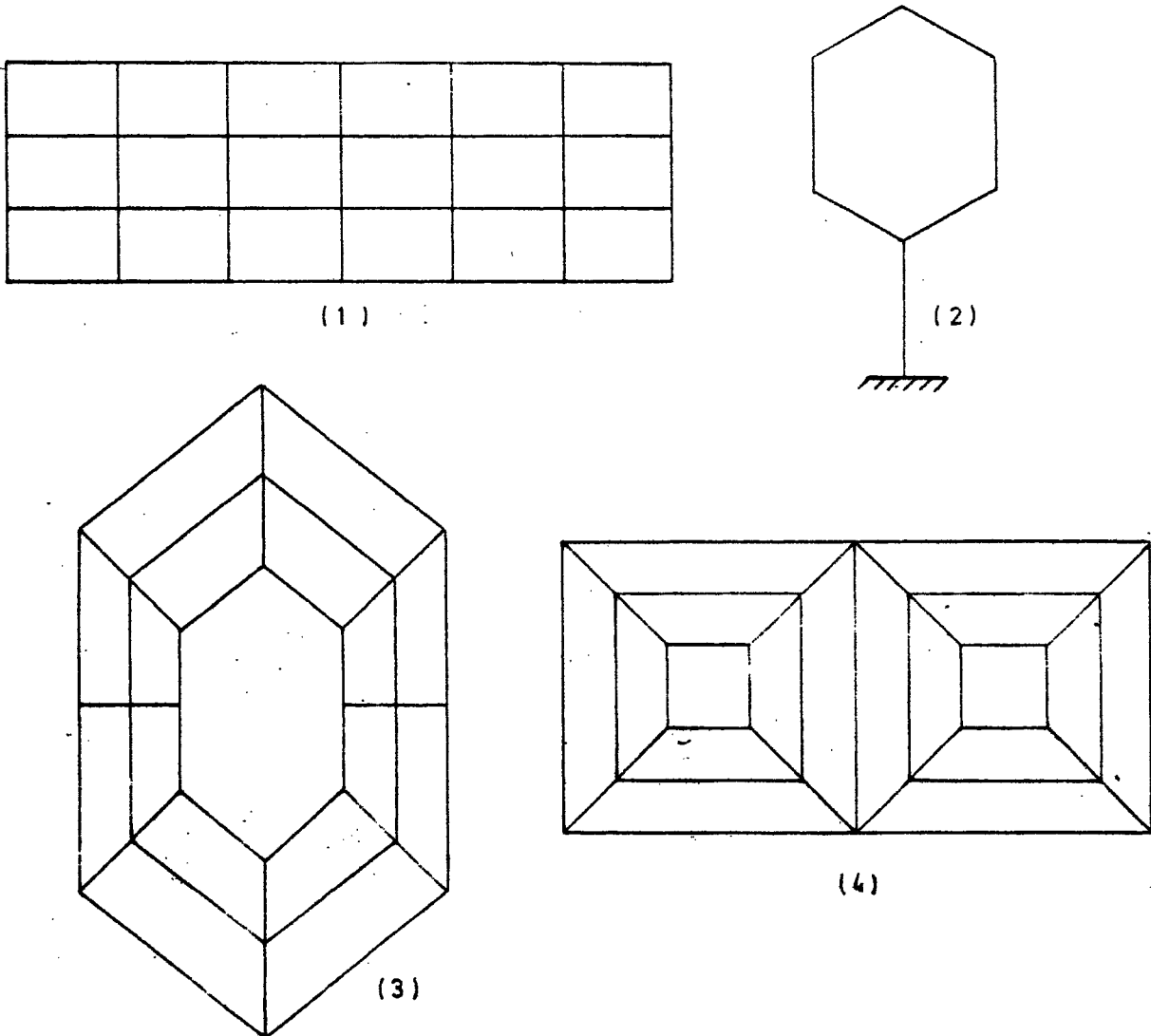


Fig. E1.1a

Si  $A-1$  es la mayor diferencia entre dos nudos contiguos en cada una de las estructuras se tiene lo que se indica en la figura E1.1b.

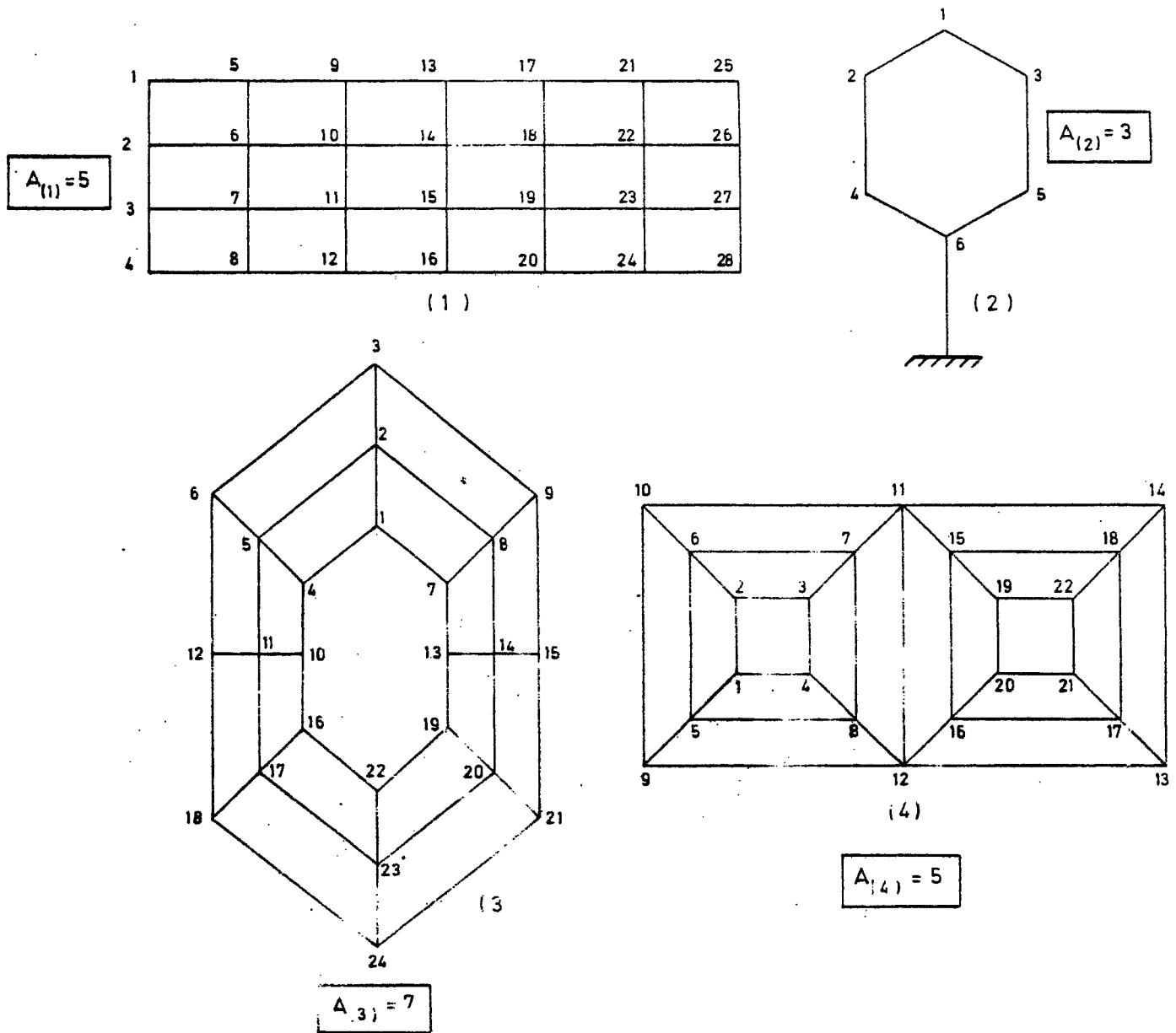


Fig E1.1b

El ancho de banda para cada una de las estructuras



anteriores es,

Estructura 1:  $(2 \times 5n - 1 = 10n - 1)$

" 2:  $(2 \times 3n - 1 = 6n - 1)$

" 3:  $(2 \times 7n - 1 = 14n - 1)$

" 4:  $(2 \times 5n - 1 = 10n - 1)$

siendo  $n$  el número de grados de libertad por nudo.

Desde el punto de vista de computación, se aprovecha el hecho de que la matriz es simétrica, siendo preciso en este caso considerar el semiancho de banda a efectos de almacenamiento en la memoria del computador. Es decir el semiancho de banda es  $An$ .

Ejercicio E 1.2.

Determinar el ancho de banda real (número de diagonales paralelas a la principal con términos no nulos en la matriz de rigidez) de la estructura de la figura E 1.2a.

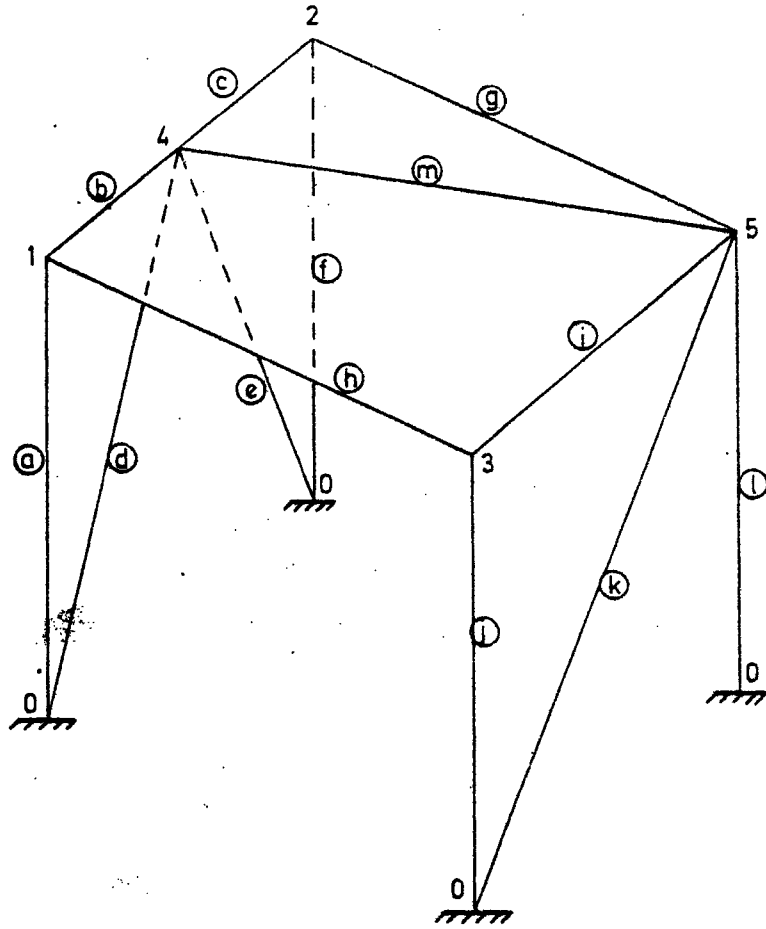


Fig. E i. 2a

Se considera en cada barra los sentidos indicados en la figura E1.2b.

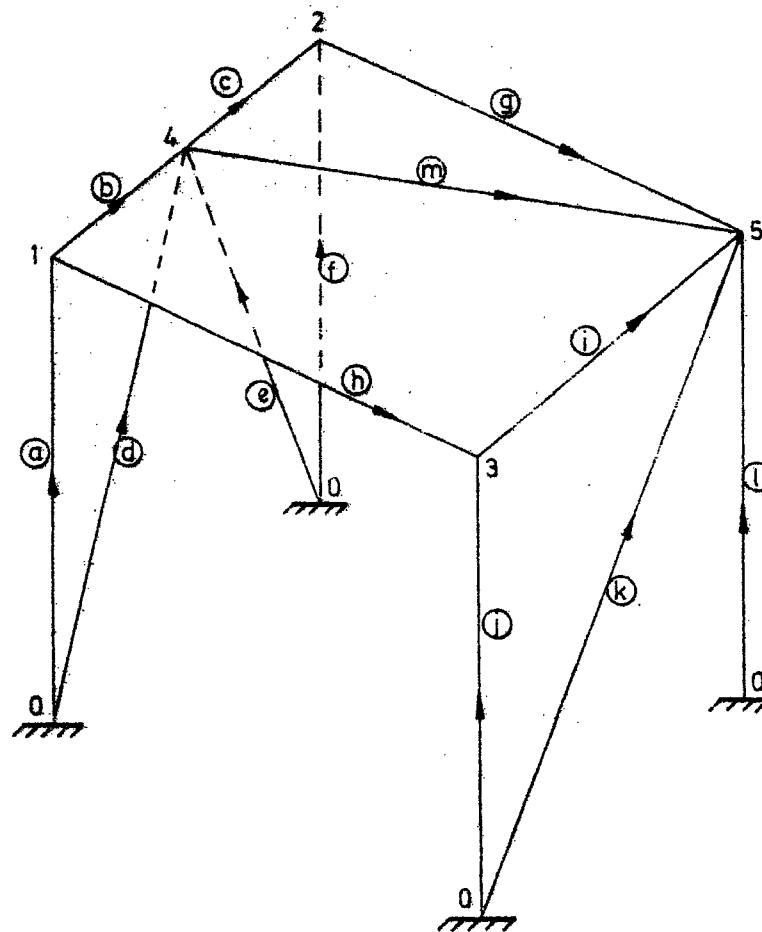
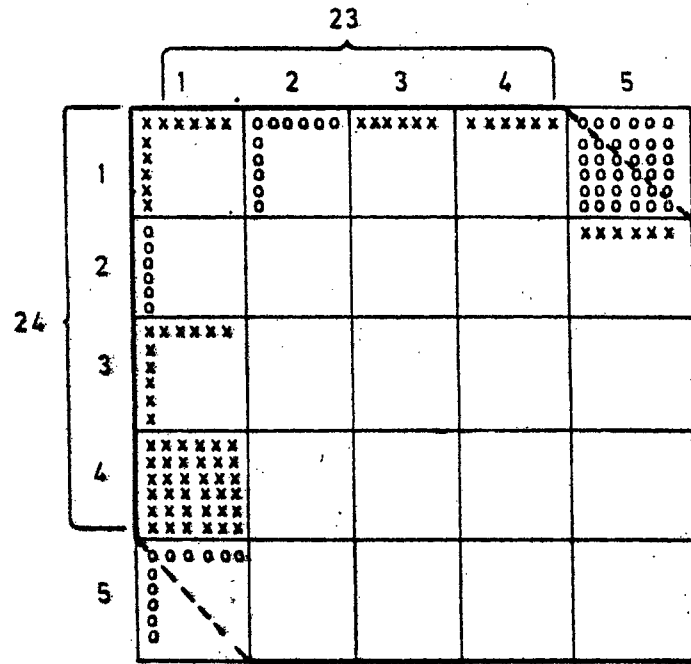


Fig. E1.2b

Con este supuesto se tiene la matriz siguiente:

	1	2	3	4	5
1	$(K_{22})_{a^+}$ $(K_{11})_{b^+}$ $(K_{11})_h$	0	$(K_{12})_h$	$(K_{12})_b$	0
2	0	$(K_{22})_{f^+}$ $(K_{22})_{c^+}$ $(K_{11})_g$	0	$(K_{21})_c$	$(K_{12})_g$
3	$(K_{21})_h$	0	$(K_{22})_{h^+}$ $(K_{11})_{i^+}$ $(K_{22})_j$	0	$(K_{12})_i$
4	$(K_{21})_b$	$(K_{12})_c$	0	$(K_{22})_{b^+}$ $(K_{22})_{d^+}$ $(K_{22})_{e^+}$ $(K_{11})_{c^+}$ $(K_{11})_m$	$(K_{12})_m$
5	0	$(K_{21})_g$	$(K_{21})_i$	$(K_{21})_m$	$(K_{22})_{g^+}$ $(K_{22})_{m^+}$ $(K_{22})_{i^+}$ $(K_{22})_{k^+}$ $(K_{22})_l$

Suponiendo que hay 6 grados de libertad por nudo (tres desplazamientos y tres giros). Se tiene la siguiente matriz:



La diferencia máxima entre nudos es:  $\begin{cases} 5-2=3 \\ 4-1=3 \end{cases}$  luego  $A=4$ , pero el ancho será:  $A \cdot (\text{número de grados de libertad por nudo}) = 4 \cdot 6 = 24$ . Ahora bien, ese sería el ancho reducido, esto es, si la matriz fuese simétrica. El ancho total es  $2 \times 24 - 1 = 48 - 1 = 47$ . (Se le resta 1 para no contar dos veces la diagonal principal).

Así pues la fórmula es  $2 \cdot A \cdot n - 1$ , donde  $A-1$  es la diferencia máxima entre dos nudos y  $n$  el número de grados de libertad por nudo (gdl).

Ejercicio E1.3.

Numerar los nudos de la estructura de la figura E1.3a., de modo que el ancho de banda de la matriz de rigidez total sea mínimo. Si  $N$  es el número de grados de libertad por nudo de la estructura, determinar el ancho de banda anterior en los dos casos siguientes:

- a) Estructura de barras.
- b) Estructura de elementos finitos cuadriláteros.

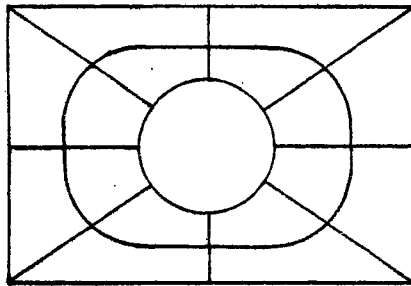


Fig. E1.3 a



Ejercicio E2.1.

Determinar la matriz de rigidez de la barra recta de la figura E2.1a. que tiene area variable línealmente entre sus extremos y está sometida únicamente a esfuerzos axiales (barra de estructura celosía).- Efectuar el cálculo mediante:

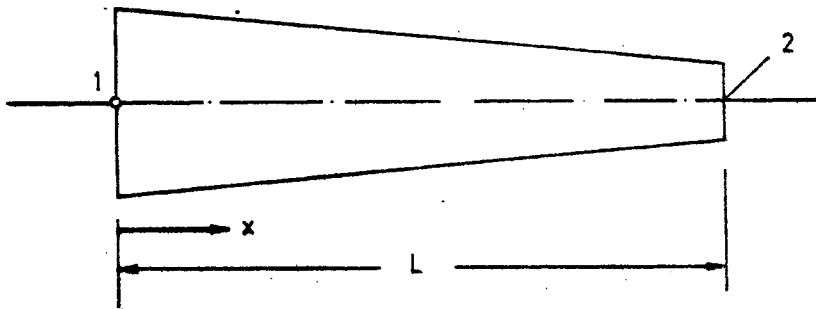


Fig. E 2. 1a

- a) -Método exacto.
- b) -Ecuación diferencial.
- c) -Elementos finitos con funciones de forma lineales.
- d) -Comparación de los métodos para  $\lambda = 1, 10$  y  $100$ .

Características:  $E, \frac{A_2}{A_1} = \lambda$ .



a) Método general.

Se considera la figura E2.1b.

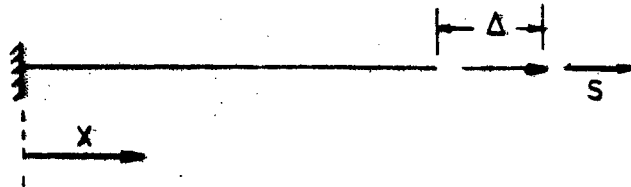


Fig. E2.1b

La energía elástica de deformación es:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L N^2 \frac{ds}{EA}$$

$$N = S (\text{constante}).$$

$$A = A_1 + \frac{A_2 - A_1}{L} x = A_1 \left( 1 + \frac{\lambda - 1}{L} x \right)$$

$$s = x$$

$$\text{Por lo tanto } U = \frac{S^2}{2EA_1} \int_0^L \frac{dx}{1 + \frac{\lambda - 1}{L} x} = \frac{S^2 L}{2EA_1} \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1}$$

Según el teorema de Castigliano, se obtiene:

$$\Delta = \frac{\partial U}{\partial S}, \text{ es decir } \Delta = \frac{L}{EA_1} \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} S$$

La matriz de flexibilidad es:

$$F = \frac{\ln \lambda}{\lambda - 1} \frac{L}{EA_1}; \quad F^{-1} = K = \frac{\lambda - 1}{\ln \lambda} \frac{EA_1}{L}$$

La matriz de equilibrio es  $H=1$ , por lo que la matriz de rigidez del elemento está dada en la fórmula:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA_1}{L} \frac{\lambda - 1}{\ln \lambda} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

b) Ecuación diferencial.

La ecuación general de la extensión de una barra es:

$$\frac{d}{dx} \left\{ EA \frac{du}{dx} \right\} + p = 0 \quad \{2.1a.\}$$

con las condiciones de contorno pertinentes en  $x=0$  y  $x=1$  estáticas ( $EA \frac{du}{dx} =$  valor especificado) ó cinemáticas ( $u =$  valor esfcificado).

En este caso se tiene:

- En la viga, la carga actuante es  $p=0$ .

Las ecuaciones de borde son:

$$\begin{array}{lll} \text{en } x=0 & u=d_1 & EA_1 \frac{du}{dx} = -p_1 \\ \text{en } x=1 & u=d_2 & EA_2 \frac{du}{dx} = p_2 \end{array}$$

La solución general de la ecuación {2.1a.} es:

$$EA \frac{du}{dx} = C_1 \quad \frac{du}{dx} = \frac{C_1}{EA_1} \quad \frac{1}{1 + \frac{\lambda-1}{L} x}$$

es decir

$$u = \frac{1}{EA_1(\lambda-1)} \left\{ C_1 \ln \left( 1 + \frac{\lambda-1}{L} x \right) + C_2 \right\}$$

Siendo  $C_1$  y  $C_2$  dos constantes arbitrarias.

La consideración de las condiciones cinemáticas conducen al siguiente sistema:

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{EA_1(\lambda-1)} \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ \ln \lambda & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}$$

En forma compacta se puede escribir

$$\underline{d} = \underline{G}_d \underline{C}$$

Las condiciones estáticas llevan a la ecuación:

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}$$

o bien matricialmente

$$\underline{p} = \underline{G}_p \underline{C}$$

Eliminando las constantes  $C_1$  y  $C_2$  (o el vector  $\underline{C}$ ) entre las ecuaciones anteriores se obtiene la matriz de rigidez.

Es decir:

$$\underline{p} = \underline{k} \underline{d}$$

$$\text{con } \underline{k} = \underline{G}_p \underline{G}_d^{-1}$$

$$\text{con } \underline{G}_d^{-1} = \frac{EA_1}{L} \frac{\lambda-1}{\ln \lambda} \begin{Bmatrix} -1 & 1 \\ \ln k & 0 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\underline{k} = \frac{EA_1}{L} \frac{\lambda-1}{\ln \lambda} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$$

### c) Método de los elementos finitos.

Se adoptan coordenadas adicionales  $\xi = \frac{x}{l}$  y las funciones de forma lineales. Es decir

$$u(x) = (N_1, N_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{con } N_1 = 1 - \xi$$

$$N_2 = \xi$$

La relación deformación-desplazamientos es

$$\epsilon(x) = \frac{d}{dx} \{u(x)\}$$

es decir

$$\epsilon = (B_1, B_2) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{con } B_i = \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}$$

$$\text{En este caso } N_1 = -\frac{1}{L} \quad N_2 = \frac{1}{L}.$$

La matriz de rigidez es

$$k_{ij} = \int_0^L B_i^T D B_j dx \quad (i, j=1, 2)$$

con  $D = EA(x) = EA_1 \{1 + (\lambda-1)\xi\}$  que es la matriz constitutiva del material.

Resulta, entonces

$$k_{11} = k_{22} = -k_{12} = -k_{21} = \frac{EA_1}{L^2} \int_0^1 \{1 + (\lambda - 1)\xi\} L d\xi = \frac{EA_1}{L} \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)$$

La matriz de rigidez es entonces

$$k = \frac{EA_1}{L} \frac{1+\lambda}{2} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$$

d) La comparación de ambas matrices se resume en la siguiente tabla de valores de  $\bar{k}$ , siendo

$\underline{k} = \bar{k} \frac{EA_1}{L} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$ , que indica la influencia de la variación de la sección.

Tabla E2.1. Valores de  $\bar{k}$

Método	exacto	elementos finitos
$\lambda=1,0$ (sección constante)	1,0	1,0
$\lambda=10$	3,91	5,5
$\lambda=100$	21,50	50,5

Es decir la aproximación se deteriora a medida que la variación de la sección es más fuerte, a no ser que se -- utilicen otras funciones de formas más ricas.

Ejercicio E2.2.

1. Determinar las funciones de forma o de interpolación del elemento finito monodimensional (1-D) de la figura E2.2a. "barra recta de tres nudos" sometido a un esfuerzo axial. Se supone un desarrollo polinómico para el desplazamiento longitudinal  $u(x)$ .
2. Dibujar dichas funciones de forma.
3. Indicar sus propiedades más importantes.

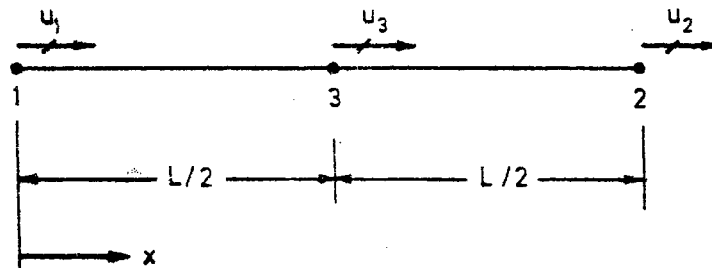


Fig. E2. 2a

4. Conocidas las funciones de forma  $N_i$  del elemento finito 1-D "barra recta de tres nudos" anterior, determinar la matriz de rigidez  $\underline{K}$ . Hallar la matriz de rigidez para el caso en que se consideren solamente dos nudos y la matriz de rigidez exacta.
5. Si actúa una carga longitudinal uniforme en toda la longitud de la barra, se desea conocer la expresión de las cargas concentradas equivalentes en los nudos (solución inicial).
6. Mediante la técnica de condensación estática, obtener los resultados de los dos apartados anteriores, para la barra recta con dos nudos 1-2, tras la eliminación del grado de libertad del nudo intermedio 3.
7. Comparar estos resultados con los obtenidos en un cálculo exacto sin la aproximación del método de los elementos finitos.

Módulo de elasticidad:  $E$ .

Area de la sección  $A_x$  variable linealmente desde un valor  $A_1$  en el nudo 1, al valor  $A_2$  en el nudo 2.

1) Considerando la figura E2.2b. y que:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad A_x = (1 + \mu \xi) A_1 \quad \text{con } \mu = \frac{A_2 - A_1}{A_1}$$

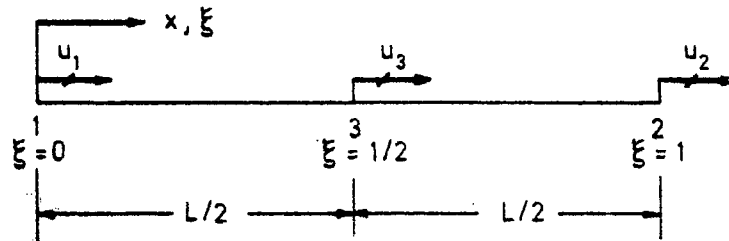


Fig. E2.2 b

y sabiendo que las funciones de forma son nulas en todos los nudos menos en uno de ellos se tiene que las funciones de interpolación son:

$$N_1 = (2\xi - 1)(\xi - 1) \quad N_2 = \xi(2\xi - 1) \quad N_3 = 4\xi(1 - \xi).$$

2) Los gráficos de las funciones de forma son:

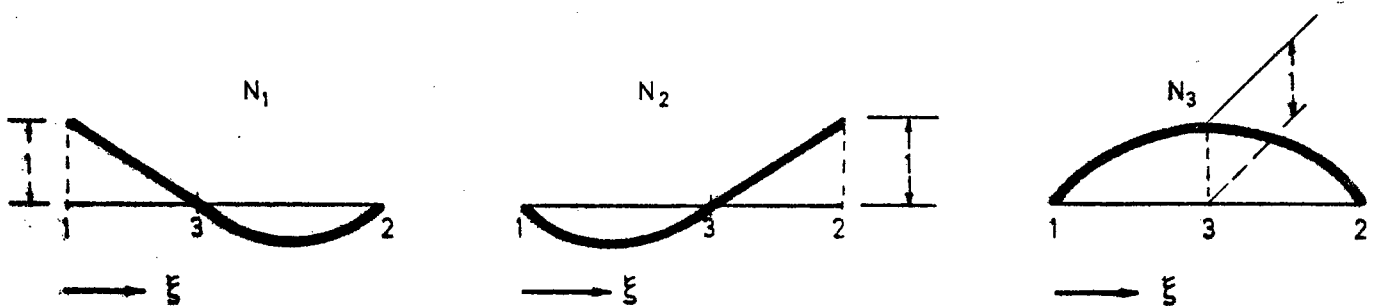


Fig E2.2 c

3) Las funciones de forma cumplen:

$$N_1 + N_2 + N_3 = 1$$

$$N_i(x_j) = \delta_{ij}$$

4) La relación deformación-desplazamientos es:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{u} \quad \text{con} \quad \underline{B} = \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{L} \underline{N},_{\xi}$$

$$B_1 = \frac{4}{L}(\xi - \frac{3}{4}) \quad B_2 = \frac{4}{L}(\xi - \frac{1}{4}) \quad B_3 = \frac{4}{L}(1-2\xi)$$

La matriz de rigidez es:

$$k_{ij} = E \int_0^L B_i A_x B_j dx = LE \int_0^1 B_i A_x B_j d\xi$$

$$\underline{k} = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{7}{3} + \frac{1}{2} \mu & \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \mu & -\frac{8}{3} - \frac{2}{3} \mu \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \mu & \frac{7}{3} + \frac{11}{6} \mu & -\frac{8}{3} - 2\mu \\ -\frac{8}{3} - \frac{2}{3} \mu & -\frac{8}{3} - 2\mu & \frac{16}{3} + \frac{8}{3} \mu \end{array} \right] \frac{EA_1}{L}$$

(1) -Matriz de rigidez del elemento 1-D "barra recta con dos nudos" de sección variable.

$$N_1 = 1-\xi \quad N_2 = \xi \quad B_1 = -\frac{1}{L}, \quad B_2 = \frac{1}{L}$$

$$k = \frac{EA}{L} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} (1 + \frac{\mu}{2})$$

La matriz de rigidez exacta es:

$$k_{\text{exacta}} = \frac{EA_1}{L} \frac{\mu}{\ln(1+\mu)} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$5) (P_1, P_2, P_3) = \int_0^L (N_1, N_2, N_3) q dx =$$

$$qL \int_0^1 \{(2\xi-1)(\xi-1) \quad \xi(2\xi-1) \quad 4\xi(1-\xi)\} d\xi = qL (1/6, -1/6, 2/3)$$

$$P_1 = \frac{qL}{6}, \quad P_2 = \frac{qL}{6}, \quad P_3 = \frac{2qL}{3}$$

$$(1) \quad \begin{pmatrix} P_1^{(1)} & P_2^{(1)} \end{pmatrix} = \int_0^1 (N_1 \ N_2) q dx = qL \int_0^1 \{(1-\xi) \ \xi\} d\xi = \\ = qL \left( \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right)$$

$$P_1^{(1)} = \frac{qL}{2} \quad \frac{qL}{2}$$

$$P_{1\text{exacta}} = \left( \frac{1}{\ln(1+\mu)} - \frac{1}{\mu} \right) qL, \quad P_{2\text{exacta}} = \left( \frac{-1}{\ln(1+\mu)} + 1 + \frac{1}{\mu} \right) qL$$

6) Condensación estática

$$u_3 = \frac{4+\mu}{4(2+\mu)} u_1 + \frac{4+3\mu}{4(2+\mu)} u_2$$

$$\underline{k^*} = \frac{EA_1}{L} \begin{Bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Bmatrix} \frac{(\mu^2+6\mu+6)}{3(2+\mu)}$$

Condensación estática:

$$P_1^* = P_1 - k_{13}^{-1} k_{33}^{-1} P_3 = \frac{qL}{6} + \frac{4+\mu}{4(2+\mu)} \frac{2qL}{3} = \frac{qL}{3} \frac{3+\mu}{2+\mu}$$

$$P_2^* = P_2 - k_{23}^{-1} k_{33}^{-1} P_3 = \frac{qL}{6} + \frac{4+3\mu}{4(2+\mu)} \frac{2qL}{3} = \frac{qL}{3} \frac{3+2\mu}{2+\mu}$$

7) Valores $\mu$	$k_{aprox.}$	$k_{exacto}$	$k_{aprox.}^{(1)}$
0	1	1	1
1	1,444	1,443	1,500
10	4,611	4,170	6.000
100	34,660	21,668	51.000

Valores $\mu$	$P_1_{aprox.}$	$P_1_{exacta}$	$P_1_{aprox.}^{(1)}$
0	0.500	0.500	0.5
1	0,444	0,443	0.5
10	0,361	0,317	0.5
100	0,337	0,207	0.5



Ejercicio E2.3.

Determinar la matriz de rigidez de la viga de sección constante y longitud  $L$  mediante la resolución de la ecuación diferencial de la flexión. (Ver figura E2.3a.).



Fig. E2 3a

Se procede a partir de la solución complementaria, como es usual en otros problemas estructurales.

Partiendo de la ecuación diferencial de flexión:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0$$

la deformada es del tipo:

$$w = A_1 + A_2 \frac{x}{L} + A_3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + A_4 \left(\frac{x}{L}\right)^3$$

Por definición se tienen los movimientos en los extremos de la viga:

$$\begin{aligned} w_1 &= A_1 \\ L\theta_1 &= A_2 \\ w_2 &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ L\theta_2 &= A_2 + 2A_3 + 3A_4 \end{aligned}$$

es decir

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} w_1 \\ L\theta_1 \\ w_2 \\ L\theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \underline{G_d} \underline{A}$$

Análogamente los esfuerzos correspondientes son:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{EI}{L^3} 6A_4 \\ LM_1 &= \frac{EI}{L^3} 2A_3 \\ Q_2 &= -\frac{EI}{L^3} 6A_4 \\ LM_2 &= \frac{EI}{L^3} (2A_3 + 6A_4) \end{aligned}$$

o bien

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ LM_1 \\ Q_2 \\ LM_2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \underline{G_p} \underline{A}$$

y la matriz de rigidez es directamente

$$\underline{p} = \underline{k} \underline{d} \quad \text{con } \underline{k} = \underline{G}_p \underline{G}_d^{-1}$$

En este caso

$$\underline{G}_d^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad k = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{o bien si se considera: } \underline{p}^1 = \begin{bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{d}^1 = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{con } \underline{p}^1 = \underline{k}^1 \underline{d}$$

$$\text{la matriz de rigidez es: } k^1 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio E2.4.

Determinar la matriz de rigidez del elemento en-  
tramado plano de la figura E2.4a., mediante los procedimien-  
tos siguientes:

- a) Método general matricial.
- b) Ecuación diferencial.
- c) Condensación estática.
- d) Método de los elementos finitos en desplazamientos.  
(Funciones de forma hermíticas).
- e) Comparar los resultados de este último método para  
 $\lambda=1$  ;  $\lambda=10$  ;  $\lambda=100$ .

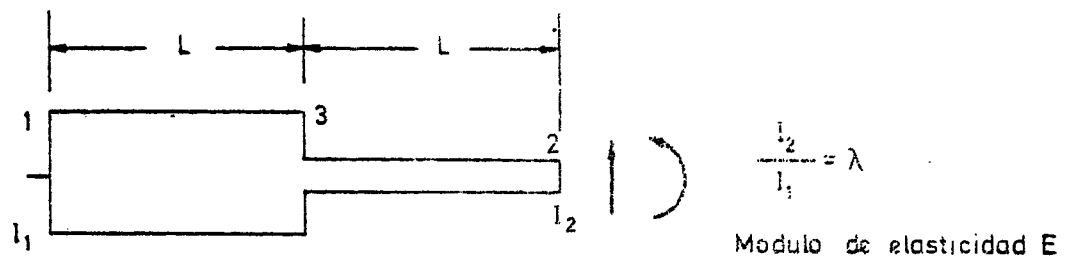


Fig. E 2. 4 a

a) Método general matricial.

Se considera la figura E2.4b.

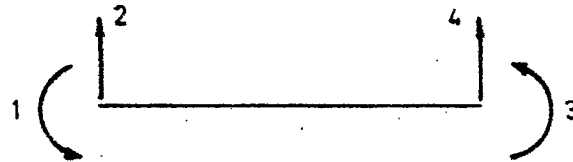


Fig. E2.4b

$$\begin{bmatrix} \underline{p}_1 \\ \underline{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HF^{-1}H^T & -HF^{-1} \\ -F^{-1}H^T & F^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{p}_2 = -F^{-1}H^T \underline{d}_1 + F^{-1} \underline{d}_2 ; \text{ y si se hace } \underline{d}_1 = 0:$$

$$\underline{p}_2 = F^{-1} \underline{d}_2$$

Teniendo en cuenta la figura E2.4c. se tiene:

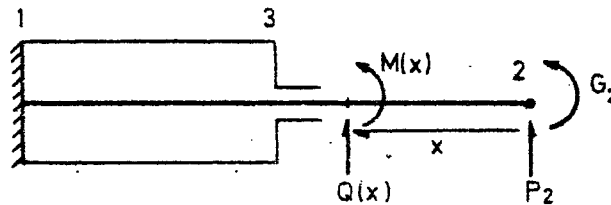


Fig. E2.4c

$$\left. \begin{aligned} M(x) &= G_2 + P_2 x \\ Q(x) &= P_2 \end{aligned} \right\} E = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2(x)}{EI(x)} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(G_2 + P_2 x)^2}{EI_2} dx + \frac{1}{2} \int_1^{2L} \frac{(G_2 + P_2 x)^2}{EI_1} dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial G_2} = \theta_2 = \int_0^L \frac{G_2 + P_2 x}{\lambda EI_1} dx + \int_1^{2L} \frac{G_2 + P_2 x}{EI_1} dx$$

$$\frac{\partial E}{\partial P_2} = d_2 = \int_0^L \frac{G_2 + P_2 x}{\lambda EI_1} x dx + \int_1^{2L} \frac{G_2 + P_2 x}{EI_1} x dx$$

$$\theta_2 = \frac{G_2 L}{\lambda E I_1} + \frac{P_2 L^2}{2 \lambda E I_1} + \frac{G_2 L}{E I_1} + \frac{P_2}{2 E I_1} \cdot 3 L^2 = \frac{L}{E I_1} \left( \frac{1}{\lambda} + 1 \right) G_2 + \frac{L^2}{2 E I_1} \left( \frac{1}{\lambda} + 3 \right) P_2$$

$$d_2 = \frac{G_2}{2 \lambda E I_1} \cdot L^2 + \frac{P_2}{3 \lambda E I_1} \cdot L^3 + \frac{G_2}{2 E I_1} \cdot 3 L^2 + \frac{P_2}{3 E I_1} \cdot 7 L^3 = \frac{L^2}{2 E I_1} \left( \frac{1}{\lambda} + 3 \right) G_2 + \frac{L^3}{3 E I_1} \left( \frac{1}{\lambda} + 7 \right) P_2$$

$$\begin{bmatrix} \theta_2 \\ d_2 \end{bmatrix} = \frac{L}{E I_1} \begin{bmatrix} (\alpha+1) & \frac{L}{2}(\alpha+3) \\ \frac{L}{2}(\alpha+3) & \frac{L^2}{3}(\alpha+7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_2 \\ P_2 \end{bmatrix}; \quad F = \frac{L}{E I_1} \begin{bmatrix} \alpha+1 & \frac{L}{2}(\alpha+3) \\ \frac{L}{2}(\alpha+3) & \frac{L^2}{3}(\alpha+7) \end{bmatrix};$$

$$\Delta = L^2 \left\{ \frac{1}{3}(\alpha+1)(\alpha+7) - \frac{1}{4}(\alpha+3)^2 \right\} = \frac{L^2}{12} \{ \alpha^2 + 14\alpha + 1 \}$$

$$F^{-1} = \frac{E I_1}{L} \times \frac{12}{L^2 \{ \alpha^2 + 14\alpha + 1 \}} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3}(\alpha+7) & -\frac{L}{2}(\alpha+3) \\ -\frac{L}{2}(\alpha+3) & \alpha+1 \end{bmatrix} = \frac{12 E I_1}{L^3 \{ \alpha^2 + 14\alpha + 1 \}} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3}(\alpha+7) & -\frac{L}{2}(\alpha+3) \\ -\frac{L}{2}(\alpha+3) & \alpha+1 \end{bmatrix}$$

$$F^{-1} = \frac{12 \lambda E I_1}{L^3 \{ \lambda^2 + 14\lambda + 1 \}} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3}(7\lambda+1) & -\frac{L}{2}(3\lambda+1) \\ -\frac{L}{2}(3\lambda+1) & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

Se considera la figura E2.4d.

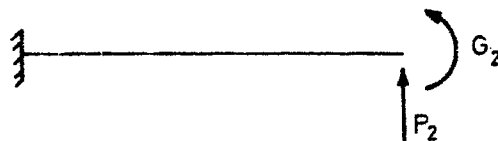


Fig. E2.4d

La matriz H es:

$$S^* = \begin{bmatrix} G_1 \\ P_1 \end{bmatrix} - H \begin{bmatrix} G_2 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G_2 & -2L P_2 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 2L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_2 \\ P_2 \end{bmatrix} \rightarrow H = \begin{bmatrix} 1 & 2L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2L & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 -HF^{-1} &= \frac{12\lambda EI_1}{L^3(\lambda^2+14\lambda+1)} \begin{bmatrix} \frac{2L^2}{3}(\lambda+1) & -\frac{L}{2}(\lambda+3) \\ \frac{L}{2}(3\lambda+1) & -(\lambda+1) \end{bmatrix}; \\
 -F^{-1}H^T &= \frac{12\lambda EI_1}{L^3(\lambda^2+14\lambda+1)} \begin{bmatrix} \frac{2L^2}{3}(\lambda+1) & \frac{L}{2}(3\lambda+1) \\ -\frac{L}{2}(\lambda+3) & -(\lambda+1) \end{bmatrix} \\
 HF^{-1}H^T &= \frac{12\lambda EI_1}{L^3(\lambda^2+14\lambda+1)} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3}(\lambda+7) & \frac{L}{2}(\lambda+3) \\ \frac{L}{2}(\lambda+3) & \lambda+1 \end{bmatrix} \\
 K &= \frac{12\lambda EI_1}{L^3(\lambda^2+14\lambda+1)} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{3}(\lambda+7) & \frac{L}{2}(\lambda+3) & \frac{2L^2}{3}(\lambda+1) & -\frac{L}{2}(\lambda+3) \\ \frac{L}{2}(\lambda+3) & \lambda+1 & \frac{L}{2}(3\lambda+1) & -(\lambda+1) \\ \frac{2L^2}{3}(\lambda+1) & \frac{L}{2}(3\lambda+1) & \frac{L^2}{3}(7\lambda+1) & -\frac{L}{2}(3\lambda+1) \\ -\frac{L}{2}(\lambda+3) & -(\lambda+1) & -\frac{L}{2}(3\lambda+1) & \lambda+1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{\lambda EI_1}{\lambda^2+14\lambda+1} \begin{bmatrix} \frac{4(\lambda+7)}{L} & \frac{6(\lambda+3)}{L^2} & \frac{8(\lambda+1)}{L} & \frac{-6(\lambda+3)}{L^2} \\ \frac{6(\lambda+3)}{L^2} & \frac{12(\lambda+1)}{L^3} & \frac{6(3\lambda+1)}{L^2} & \frac{-12(\lambda+1)}{L^3} \\ \frac{8(\lambda+1)}{L} & \frac{6(3\lambda+1)}{L^2} & \frac{4(7\lambda+1)}{L^2} & \frac{-6(3\lambda+1)}{L^2} \\ \frac{-6(\lambda+3)}{L^2} & \frac{-12(\lambda+1)}{L^3} & \frac{-6(3\lambda+1)}{L^2} & \frac{12(\lambda+1)}{L^3} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

b) Ecuación diferencial.

Se considera la figura E2.4e.

La ecuación diferencial de una viga recta a flexión

es:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 w}{dx^2}) + p = 0$$

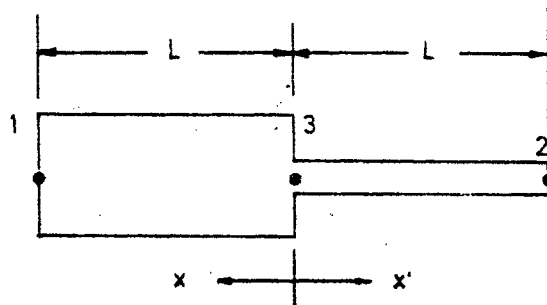


Fig. E2 4 e

con las condiciones de apoyo en  $x=0$  ,  $x=L$  :

- Cinemáticas:  $w$  ó  $\frac{dw}{dx}$  son valores especificados.
- Estáticas:  $-EI \frac{d^2 w}{dx^2}$  ó  $EI \frac{d^3 w}{dx^3}$  son valores especificados.

En este caso, se tiene:

$$EI_1 = \frac{d^4 w_A}{dx^4} = 0 \quad \text{para el tramo 1-3}$$

$$EI_2 = \frac{d^4 w_B}{dx'^4} = 0 \quad \text{para el tramo 3-2}$$

La solución general es:

$$w_A = A_1 + A_2 \left(\frac{x}{L}\right) + A_3 \left(\frac{x}{L}\right)^2 + A_4 \left(\frac{x}{L}\right)^3$$

$$w_B = B_1 + B_2 \left(\frac{x'}{L}\right) + B_3 \left(\frac{x'}{L}\right)^2 + B_4 \left(\frac{x'}{L}\right)^3$$

Las condiciones de continuidad en 3 implican, para esa sección:

$$w_A = w_B; \quad \frac{dw_A}{dx} = - \frac{dw_B}{dx'}; \quad EI_1 \frac{d^2 w_A}{dx^2} = EI_2 \frac{d^2 w_B}{dx'^2}; \quad EI_1 \frac{d^3 w_A}{dx^3} = -EI_2 \frac{d^3 w_B}{dx'^3}$$

Es decir:  $A_1 = B_1$ ;  $A_2 = -B_2$ ;  $\alpha A_3 = B_3$ ;  $\alpha A_4 = -B_4$

con  $\alpha = \frac{1}{\lambda}$  .



Por otra parte, las condiciones cinemáticas de borde son:

$$x=L, \quad W_A = W_1 = d_2 = d_{y1}, \quad -\frac{dw_A}{dx} = \theta_1 = d_1$$

$$x'=L; \quad W_B = W_2 = d_4 = d_{y2}; \quad \frac{dw_B}{dx'} = \theta_2 = d_3$$

Resulta, entonces:

$$Ld_1 = -A_2 - 2A_3 - 3A_4$$

$$d_2 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$Ld_3 = -A_2 + 2\alpha A_3 - 3\alpha A_4$$

$$d_4 = A_1 - A_2 + \alpha A_3 - \alpha A_4$$

o bien, en forma matricial:

$$\underline{\bar{d}} = \underline{Gd} \cdot \underline{A}$$

con  $\underline{\bar{d}}^T = \{Ld_1, d_2, Ld_3, d_4\}$  y  $\underline{A}^T = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

$$\underline{Gd} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2\alpha & -3\alpha \\ 1 & -1 & \alpha & -\alpha \end{bmatrix}$$

Análogamente, las condiciones estáticas de borde se imponen como sigue:

$$x=1; \quad -EI_1 \frac{d^2 w_A}{dx^2} = m_1 = p_1 = G_1; \quad -EI_1 \frac{d^3 w_A}{dx^3} = q_1 = p_2 = P_1$$

$$x'=1; \quad +EI_2 \frac{d^2 w_B}{dx'^2} = m_2 = p_3 = G_2; \quad -EI_2 \frac{d^3 w_B}{dx'^3} = q_2 = p_4 = P_2$$

Obteniendose:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ Lp_2 \\ p_3 \\ Lp_4 \end{bmatrix} = \frac{EI_1}{L^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$\underline{\bar{p}} = \underline{Gp} \cdot \underline{A} \quad (E2.4b.)$$

De (E2.4a.) se deduce:

$$\underline{Gd}^T \cdot \underline{\bar{d}} = \underline{A}$$

y entrando en (E2.4b.):  $\underline{\bar{p}} = \underline{Gp} \cdot \underline{Gd}^T \cdot \underline{\bar{d}}$

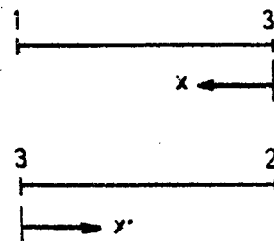


Fig. E2.4 f

Es decir:  $\underline{p} = \underline{K}_1 \cdot \underline{d}$ , siendo  $\underline{K}_1 = \underline{Gp} \cdot \underline{Gd}^{-1}$

Inversión de  $\underline{Gd}$ :  $\underline{Gd} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2\alpha & -3\alpha \\ 1 & -1 & \alpha & -\alpha \end{bmatrix}$

$|\underline{Gd}| = \alpha^2 + 14\alpha + 1;$

$\underline{Gd}^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + 14\alpha + 1} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ 1-5\alpha & 3(1-\alpha) & 5-\alpha & 3(\alpha-1) \\ -(3\alpha+1) & -2(\alpha+1) & -(\alpha+3) & 2(\alpha+1) \end{bmatrix}$

Como es  $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ , resulta:

$\underline{Gd}^{-1} = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \frac{\lambda-5}{\lambda} & \frac{3(\lambda-1)}{\lambda} & \frac{5\lambda-1}{\lambda} & \frac{3(1-\lambda)}{\lambda} \\ -\frac{(3+\lambda)}{\lambda} & -\frac{2(1+\lambda)}{\lambda} & -\frac{(1+3\lambda)}{\lambda} & \frac{2(1+\lambda)}{\lambda} \end{bmatrix} =$

$= \frac{\lambda}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} \begin{bmatrix} x & x & x & x \\ x & x & x & x \\ \lambda-5 & 3(\lambda-1) & 5\lambda-1 & 3(1-\lambda) \\ -(\lambda+3) & -2(\lambda+1) & -(3\lambda-1) & 2(1+\lambda) \end{bmatrix}$

Por lo tanto, multiplicando  $\underline{Gp} \cdot \underline{Gd}^{-1}$ , se obtiene:

$\begin{bmatrix} p_1 \\ LP_2 \\ p_3 \\ LP_4 \end{bmatrix} = \frac{\lambda E I_1}{(\lambda^2 + 14\lambda + 1) L^2} \begin{bmatrix} +4(\lambda+7) & +6(\lambda+3) & +8(\lambda+1) & -6(\lambda+3) \\ 6(\lambda+3) & 12(\lambda+1) & 6(3\lambda+1) & -12(\lambda+1) \\ +8(\lambda+1) & +6(3\lambda+1) & +4(7\lambda+1) & -6(3\lambda+1) \\ -6(\lambda+3) & -12(\lambda+1) & -6(3\lambda+1) & +12(\lambda+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ld_1 \\ d_2 \\ Ld_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$

Queda, por tanto la matriz de rigidez:

$$K = \frac{\lambda E I_1}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} \begin{bmatrix} + \frac{4(\lambda+7)}{L} + \frac{6(\lambda+3)}{L^2} & \frac{+8(\lambda+1)}{L} & \frac{-6(\lambda+3)}{L^2} \\ \frac{6(\lambda+3)}{L^2} & \frac{12(\lambda+1)}{L^3} & \frac{6(3\lambda+1)}{L^2} & \frac{-12(\lambda+1)}{L^3} \\ \frac{+8(\lambda+1)}{L} & \frac{+6(3\lambda+1)}{L^2} & \frac{+4(7\lambda+1)}{L} & \frac{-6(3\lambda+1)}{L^2} \\ \frac{-6(\lambda+3)}{L^2} & \frac{-12(\lambda+1)}{L^3} & \frac{-6(3\lambda+1)}{L^2} & \frac{+12(\lambda+1)}{L^3} \end{bmatrix}$$

c) Condensación estática.

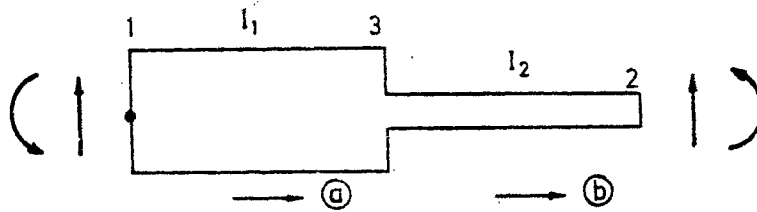


Fig. E2 4 g

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_3 = 0 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (K_{11})_a & (K_{12})_a & 0 \\ (K_{21})_a & (K_{22})_a + (K_{11})_b & (K_{12})_b \\ 0 & (K_{21})_b & (K_{22})_b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$$0 = (K_{21})_a \cdot d_1 + \{ (K_{22})_a + (K_{11})_b \} d_3 + (K_{12})_b \cdot d_2$$

A

$$d_3 = -A^{-1} (K_{21})_a \cdot d_1 - A^{-1} (K_{12})_b \cdot d_2$$

$$P_1 = (K_{11})_a d_1 + (K_{12})_a \cdot d_3 = \{ (K_{11})_a - (K_{12})_a A^{-1} (K_{21})_a \} d_1 - (K_{12})_a A^{-1} (K_{12})_b \cdot d_2$$

$$P_2 = (K_{21})_b d_3 + (K_{22})_b \cdot d_2 = - (K_{21})_b \cdot A^{-1} (K_{21})_a d_1 + \{ (K_{22})_b - (K_{21})_b A^{-1} (K_{12})_b \} d_2$$

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}; K_{12} = \begin{bmatrix} \frac{2EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} \end{bmatrix}; K_{21} = \begin{bmatrix} \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} \end{bmatrix};$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{-6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4EI_1}{L} & \frac{-6EI_1}{L^2} \\ \frac{-6EI_1}{L^2} & \frac{12EI_1}{L^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EI_2}{L} & \frac{6EI_2}{L^2} \\ \frac{6EI_2}{L^2} & \frac{12EI_2}{L^3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EI_1}{L^3} & 4L^2 & -6L \\ -6L & 12 & 12 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} 4\lambda L^2 & 6\lambda L \\ 6\lambda L & 12\lambda \end{bmatrix} = \frac{EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} 4(1+\lambda)L^2 & 6(\lambda-1)L \\ 6(\lambda-1)L & 12(\lambda+1)L \end{bmatrix}$$

$$\Delta 12 L^2 \{\lambda^2 + 14\lambda + 1\}; A^{-1} = \frac{L}{12 EI_1 (\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} 12(\lambda+1) & -6(\lambda-1)L \\ -6(\lambda-1)L & 4(\lambda+1)L^2 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = A^{-1} (K_{21})_a = \frac{L}{12 (\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} 12(\lambda+1) & -6(\lambda-1)L \\ -6(\lambda-1)L & 4(\lambda+1)L^2 \end{bmatrix} \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 2L^2 & 6L \\ -6L & -12 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{12 L^2 (\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} 12L^2 (5\lambda - 1) & 144L\lambda \\ -12L^3 (3\lambda + 1) & -12L^2 (7\lambda + 1) \end{bmatrix}$$

$$B_1 = A^{-1} (K_{21})_a = \frac{L}{L (\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} L (5\lambda - 1) & 12\lambda \\ -L^2 (3\lambda + 1) & -L (7\lambda + 1) \end{bmatrix}$$

$$B_2 = A^{-1} (K_{12})_b = \frac{L}{12 (\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} 12(\lambda+1) & -6(\lambda-1)L \\ -6(\lambda-1)L & 4(\lambda+1)L^2 \end{bmatrix} \frac{\lambda}{L^3} \begin{bmatrix} 2L^2 & -6L \\ 6L & -12 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{\lambda}{12 L^2 (\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} -12L^2 (\lambda - 5) & -144L \\ 12L^3 (\lambda + 3) & -12L^2 (\lambda + 7) \end{bmatrix}$$

$$B_2 = A^{-1} (K_{12})_b = \frac{\lambda}{L (\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} L (5 - \lambda) & -12 \\ L^2 (\lambda + 3) & -L (\lambda + 7) \end{bmatrix}$$

$$C_1 = (K_{12})_a \cdot B_1 = \frac{2EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} L^2 & -3L \\ 3L & -6 \end{bmatrix} \times \frac{L}{(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} L (5\lambda - 1) & 12\lambda \\ -L^2 (3\lambda + 1) & -L (7\lambda + 1) \end{bmatrix} =$$

$$\frac{2EI_1}{L^4 (\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} 2(7\lambda + 1)L^3 & 3(11\lambda + 1)L^2 \\ 3(11\lambda + 1)L^2 & 6(13\lambda + 1)L \end{bmatrix}$$

$$C_2 = (K_{12})_a \cdot \underline{B}_2 = \frac{2EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} L^2 & -3L \\ 3L & -6 \end{bmatrix} \frac{\lambda}{L(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} L(5-\lambda) & -12 \\ L^2(\lambda+3) & -L(\lambda+7) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2\lambda EI_1}{L^4(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} -4(\lambda+1)L^3 & 3(\lambda+3)L^2 \\ -3(3\lambda+1)L^2 & 6(\lambda+1)L \end{bmatrix}$$

$$C_3 + (K_{21})_b \cdot \underline{B}_1 = \frac{2\lambda EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} L^2 & 3L \\ -3L & -6 \end{bmatrix} \frac{1}{-L^2(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} L(5\lambda-1) & 12\lambda \\ -L^2(3\lambda+1) & -L(7\lambda+1) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2\lambda EI_1}{L^4(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} -4(\lambda+1)L^3 & -3(3\lambda+1)L^2 \\ 3(\lambda+3)L^2 & 6(\lambda+1)L \end{bmatrix}$$

$$C_4 = (K_{21})_b \cdot \underline{B}_2 = \frac{2\lambda EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} L^2 & 3L \\ -3L & -6 \end{bmatrix} \frac{\lambda}{L(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} L(5-\lambda) & -12 \\ L^2(\lambda+3) & -L(\lambda+7) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2\lambda^2 EI_1}{L^4(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} 2(\lambda+7)L^3 & -3(\lambda+11)L^2 \\ -3(\lambda+11)L^2 & 6(\lambda+13)L \end{bmatrix}$$

$$(K_{11})_T = (K_{11})_a - C_1 = \frac{2EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} 2L^2 & 3L \\ 3L & 6 \end{bmatrix} - \frac{2EI_1}{L^3(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 2(7\lambda+1)L^2 & 3(11\lambda+1)L \\ 3(11\lambda+1)L & 6(13\lambda+1) \end{bmatrix} = \frac{\lambda EI_1}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} \begin{bmatrix} \frac{4(\lambda+7)}{L} & \frac{6(\lambda+3)}{L^3} \\ \frac{6(\lambda+3)}{L^2} & \frac{12(\lambda+1)}{L^3} \end{bmatrix}$$

$$(K_{12})_T = -C_2 = \frac{\lambda EI_1}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} \begin{bmatrix} \frac{8(\lambda+1)}{L} & \frac{-6(\lambda+3)}{L^2} \\ \frac{6(3\lambda+1)}{L^2} & \frac{-12(\lambda+1)}{L^3} \end{bmatrix}$$

$$(K_{21})_T = -C_3 = \frac{\lambda EI_1}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} \begin{bmatrix} \frac{8(\lambda+1)}{L} & \frac{6(3\lambda+1)}{L^2} \\ \frac{-6(\lambda+3)}{L^2} & \frac{-12(\lambda+1)}{L^3} \end{bmatrix}$$

$$(K_{22})_T = (K_{22})_b - C_4 = \frac{2\lambda EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} 2L^2 & -3L \\ -3L & 6L \end{bmatrix}$$

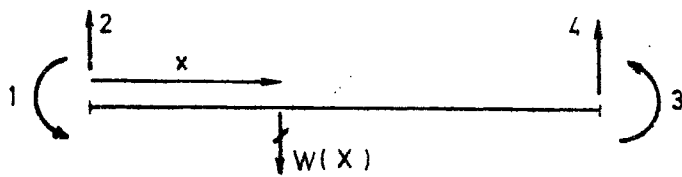
$$= \frac{2EI_1}{L^3(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \cdot \begin{bmatrix} 2\lambda(\lambda+7)L^2 & -3\lambda(\lambda+11)L \\ -3\lambda(\lambda+11)L & 6\lambda(\lambda+13) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{EI_1}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} \begin{bmatrix} \frac{4(7\lambda+1)}{L} & \frac{-6(3\lambda+1)}{L^2} \\ \frac{-6(3\lambda+1)}{L^2} & \frac{12(\lambda+1)}{L^3} \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$K = \frac{EI_1}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} \begin{bmatrix} \frac{4(\lambda+7)}{L} & \frac{6(\lambda+3)}{L^2} & \frac{8(\lambda+1)}{L} & \frac{-6(\lambda+3)}{L^2} \\ \frac{6(\lambda+3)}{L^2} & \frac{12(\lambda+1)}{L^3} & \frac{6(3\lambda+1)}{L^2} & \frac{-12(\lambda+1)}{L^3} \\ \frac{8(\lambda+1)}{L} & \frac{6(3\lambda+1)}{L^2} & \frac{4(7\lambda+1)}{L} & \frac{-6(3\lambda+1)}{L^2} \\ \frac{-6(\lambda+3)}{L^2} & \frac{-12(\lambda+1)}{L^3} & \frac{6(3\lambda+1)}{L^2} & \frac{12(\lambda+1)}{L^3} \end{bmatrix}$$

d) Método de los elementos finitos.



$$\begin{aligned} d_1 &= \theta_1 \rightarrow W'(0) \\ d_2 &= d_{y1} \rightarrow W(0) \\ d_3 &= \theta_2 \rightarrow W'(L) \\ d_4 &= d_{y2} \rightarrow W(L) \end{aligned}$$

Fig. E2 4h

Se toma  $L_1 = 2L$  y se realiza el cambio  $\xi = \frac{x}{L_1}$

$$W = \{\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4\} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Las funciones de forma han de cumplir:

	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\phi_4$
$\xi=0$	0	1	0	0
$\xi=1$	0	0	0	1
	$\phi_1'$	$\phi_2'$	$\phi_3'$	$\phi_4'$
$\xi=0$	1	0	0	0
$\xi=1$	0	0	1	0

Y quedan como sigue:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \xi(1-\xi)^2 \cdot 2L \\ \phi_2 &= 1-3\xi^2+2\xi^3 \\ \phi_3 &=-\xi^2(1-\xi) \cdot 2L \\ \phi_4 &= 3\xi^2-2\xi^3 \end{aligned}$$

$$\underline{B} = \frac{1}{4L^2} \{ 2L(-4+6\xi), -6+12\xi, 2L(-2+6\xi), 6-12\xi \}$$



$$\underline{B} = \frac{1}{2L^2} \{ (-4+6\xi)L, -3+6\xi, (-2+6\xi)L, 3-6\xi \} = \frac{1}{2L^2} \underline{B}^*$$

$$\underline{K} = \int_0^L \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, dx = 2L \times \frac{1}{4L} \int_0^1 \underline{B}^{*T} E I (\xi) \underline{B}^* \, d\xi = \frac{E}{2L^3} \int_0^1 \underline{B}^{*T} I(\xi) \underline{B}^* \, d\xi$$

$$\int_0^1 I(\xi) \, d\xi = I_1 \int_0^{1/2} d\xi + \lambda I_1 \int_{1/2}^1 d\xi = I_1 \times \frac{1}{2} + \lambda I_1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} I_1 (1+\lambda)$$

$$\int_0^1 \xi I(\xi) \, d\xi = I_1 \int_0^{1/2} \xi \, d\xi + \lambda I_1 \int_{1/2}^1 \xi \, d\xi = I_1 \times \frac{1}{8} + \lambda I_1 \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8} I_1 (1+3\lambda)$$

$$\int_0^1 \xi^2 I(\xi) \, d\xi = I_1 \int_0^{1/2} \xi^2 \, d\xi + \lambda I_1 \int_{1/2}^1 \xi^2 \, d\xi = I_1 \times \frac{1}{24} + \lambda I_1 \times \frac{7}{24} = \frac{1}{24} I_1 (1+7\lambda)$$

de donde se obtiene:

$$K_{ij} = \frac{E}{2L^3} \int_0^1 \underline{B}_i^* I(\xi) \underline{B}_j^* \, d\xi$$

$$K_{11} = \frac{EI_1}{2L^3} \left\{ \frac{16}{2}(1+\lambda) - \frac{48}{8}(1+3\lambda) + \frac{36}{24}(1+7\lambda) \right\} = \frac{4EI_1}{4L^3} (\lambda+7)$$

$$K_{12} = \frac{EI_1}{2L^2} \left\{ \frac{12}{2}(1+\lambda) - \frac{42}{8}(1+3\lambda) + \frac{36}{24}(1+7\lambda) \right\} = \frac{3EI_1}{8L^2} (\lambda+3)$$

$$K_{13} = \frac{EI_1}{2L} \left\{ \frac{8}{2}(1+\lambda) - \frac{36}{8}(1+3\lambda) + \frac{36}{24}(1+7\lambda) \right\} = \frac{EI_1}{2L} (\lambda+1)$$

$$K_{14} = \left\{ \frac{EI_1}{2L^2} \left[ -\frac{12}{2}(1+\lambda) + \frac{42}{8}(1+3\lambda) - \frac{36}{24}(1+7\lambda) \right] \right\} = \frac{-3EI_1}{8L^2} (\lambda+3)$$

$$K_{22} = \frac{EI_1}{2L^3} \left\{ \frac{9}{2}(1+\lambda) - \frac{36}{8}(1+3\lambda) + \frac{36}{24}(1+7\lambda) \right\} = \frac{3EI_1}{4L^3} (\lambda+1)$$

$$K_{23} = \frac{EI_1}{2L^2} \left\{ \frac{6}{2}(1+\lambda) - \frac{30}{8}(1+3\lambda) + \frac{36}{24}(1+7\lambda) \right\} = \frac{3EI_1}{8L^2} (3\lambda+1)$$

$$K_{24} = \frac{EI_1}{2L^3} \left\{ -\frac{9}{2}(1+\lambda) + \frac{36}{8}(1+3\lambda) - \frac{36}{24}(1+7\lambda) \right\} = \frac{-3EI_1}{4L^3} (\lambda+1)$$

$$K_{33} = \frac{EI_1}{2L} \left\{ \frac{4}{2}(1+\lambda) - \frac{24}{8}(1+3\lambda) + \frac{36}{24}(1+7\lambda) \right\} = \frac{EI_1}{4L} (7\lambda+1)$$

$$K_{34} = \frac{EI_1}{2L^2} \left\{ -\frac{6}{2}(1+\lambda) + \frac{30}{8}(1+3\lambda) - \frac{36}{24}(1+7\lambda) \right\} = -\frac{3EI_1}{8L^2}(3\lambda+1)$$

$$K_{44} = \frac{EI_1}{2L^3} \left\{ \frac{9}{2}(1+\lambda) - \frac{36}{8}(1+3\lambda) + \frac{36}{24}(1+7\lambda) \right\} = \frac{3EI_1}{4L^3}(\lambda+1)$$

Es decir:

$$\underline{K} = EI_1 \begin{bmatrix} \frac{\lambda+7}{4L} & \frac{3(\lambda+3)}{8L^2} & \frac{\lambda+1}{2L} & \frac{-3(\lambda+3)}{8L^2} \\ & \frac{3(\lambda+1)}{4L^3} & \frac{3(3\lambda+1)}{8L^2} & \frac{-3(\lambda+1)}{4L^3} \\ & & \frac{7\lambda+1}{4L} & \frac{-3(3\lambda+1)}{8L^2} \\ & & & \frac{3(\lambda+1)}{4L^3} \end{bmatrix}$$

Simétrico

e) Comparación de resultados.

Se va a prescindir del factor común  $EI_1$  y de los valores  $L$ ,  $L^2$  y  $L^3$ , comparando solamente los coeficientes numéricos.

$\lambda=1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1,5 & 1 & -1,5 \\ & 1,5 & 1,5 & -1,5 \\ & & 2 & -1,5 \\ & & & 1,5 \end{bmatrix}$$

K exacta

$$\begin{bmatrix} 2 & 1,5 & 1 & -1,5 \\ & 1,5 & 1,5 & -1,5 \\ & & 2 & -1,5 \\ & & & 1,5 \end{bmatrix}$$

K elementos finitos

$\lambda=10$

$$\begin{bmatrix} 2,822 & 3,236 & 3,65 & -3,236 \\ & -5,477 & 7,718 & -5,477 \\ & & 11,784 & -7,718 \\ & & & 5,477 \end{bmatrix}$$

Exacta

$$\begin{bmatrix} 4,25 & 4,875 & 5,5 & -4,875 \\ & 8,25 & 11,625 & -8,25 \\ & & 17,75 & -11,625 \\ & & & 8,25 \end{bmatrix}$$

Elementos finitos

$\lambda=100$

$$\begin{bmatrix} 3,754 & 5,42 & 7,087 & -5,42 \\ & 10,63 & 15,84 & -10,63 \\ & & 24,59 & -15,84 \\ & & & 10,63 \end{bmatrix}$$

Exacta

$$\begin{bmatrix} 26,75 & 38,625 & 50,5 & -38,625 \\ & 75,75 & 112,875 & -75,75 \\ & & 175,25 & -112,875 \\ & & & 75,75 \end{bmatrix}$$

Elementos finitos

Se observa que para  $\lambda=1$  la solución exacta y la obtenida por el método de elementos finitos coinciden. A medida que  $\lambda$  crece los resultados calculados por este segundo método son más inexactos.

Ejercicio E2.5.

Hallar la matriz de rigidez de una barra recta de sección circular variable, con un radio  $R$  en el extremo 1 y  $r=\lambda R$  el extremo 2, considerada como un elemento de un emparrillado plano. (No se considera alabeo de la sección).

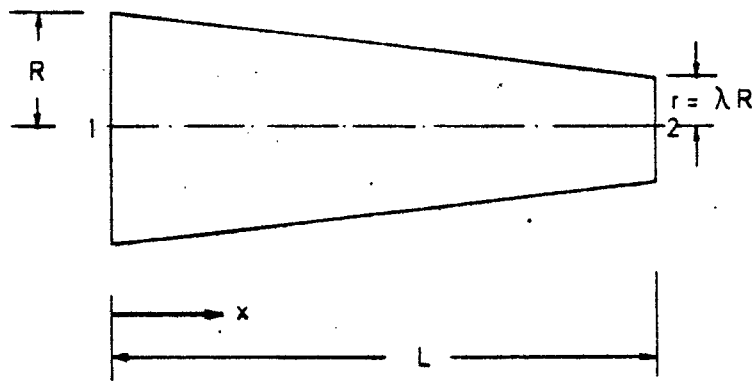


Fig. E2. 5 a

En una sección generica  $x$ , se tiene:

$$R_x = r + \frac{R-r}{L} x = r \left\{ 1 + \frac{\lambda-1}{L} \bar{x} \right\} \quad \text{con } \bar{x} = \frac{x}{L}.$$

$$J_x = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi r^4}{2} \{1 + (\lambda-1) \bar{x}\}^4 \quad I_x = \frac{1}{2} J_x.$$

La energía de deformación es:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dx + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{T^2}{GJ} dx$$

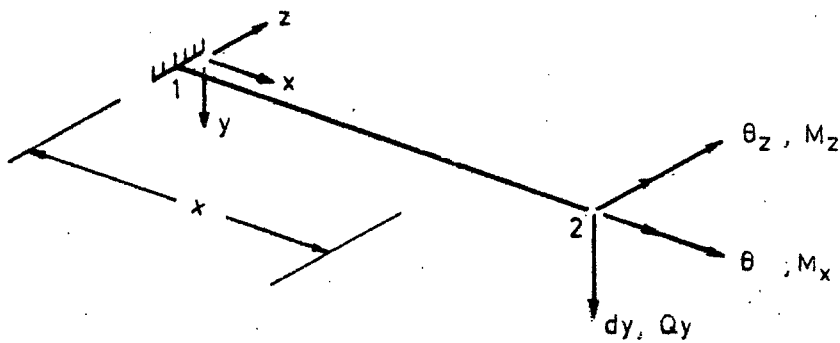


Fig. E2.5b

Teniendo en cuenta la figura E2.5b, se tiene:

$$M = Q_y (1-x) + M_2 = (1-x, 1) \begin{pmatrix} Q_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

$$T = M_x = 1 \cdot M_x$$

La aplicación del teorema de Castigliano, permite escribir:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial Q_y} \right) = \left\{ \int_0^L \frac{1}{EI} (1-x, 1) dx \right\} \begin{pmatrix} Q_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

$$\theta_x = \left\{ \int_0^L \frac{dx}{GJ} \right\} M_x$$

Las integrales a resolver son:

$$\int_0^1 \frac{d\bar{x}}{\{1 + (\lambda-1) \bar{x}\}^4} = \frac{1}{\lambda-1} \left\{ -\frac{1}{3} \frac{1}{(1 + (\lambda-1) \bar{x})^3} \right\}_0^1 = \frac{1}{3(\lambda-1)} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right) = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{3\lambda^3}$$

$$\int_0^1 \frac{\bar{x} d\bar{x}}{\{1+(\lambda-1)\bar{x}\}^4} = \frac{1}{(\lambda-1)^2} \int_1^\lambda \frac{(u-1) du}{u^4} = \frac{1}{(\lambda-1)^2} \left\{ -\frac{1}{2u^2} + \frac{1}{3u^3} \right\}_1^\lambda = \frac{\lambda^3 - 3\lambda + 2}{6\lambda^3(\lambda-1)^2} = \frac{\lambda+2}{6\lambda^3}$$

$$\int_0^1 \frac{\bar{x}^2 d\bar{x}}{\{1+(\lambda-1)\bar{x}\}^4} = \frac{1}{(\lambda-1)^3} \int_1^\lambda \frac{(u-1)^2 du}{u^4} = \frac{1}{(\lambda-1)^3} \left\{ -\frac{1}{u} + \frac{1}{u^2} - \frac{1}{3u^3} \right\}_1^\lambda = \frac{1}{3\lambda^3}$$

Por lo tanto se tiene:

$$I_1 = \int_0^L \frac{(L-x)^2}{EI_x} dx = \int_0^L \frac{L^2(1-\bar{x})^2 dx}{E\frac{\pi r^4}{4}\{1+(\lambda-1)\bar{x}\}^4} = \frac{4L^3}{E\pi r^4} \int_0^1 \frac{(1-\bar{x})^2 d\bar{x}}{\{1+(\lambda-1)\bar{x}\}^4}$$

$$\frac{4L^3}{E\pi r^4} \left\{ \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{3\lambda^3} - \frac{2(\lambda+2)}{6\lambda^3} + \frac{1}{3\lambda^3} \right\} \quad I_1 = \frac{1}{3\lambda} \times \frac{4L^3}{\pi r^4 E}$$

$$I_2 = \int_0^L \frac{(L-x)}{EI_x} dx = \int_0^L \frac{L(1-\bar{x}) dx}{E\frac{\pi r^4}{4}\{1+(\lambda-1)\bar{x}\}^4} = \frac{4L^2}{E\pi r^4} \int_0^1 \frac{(1-\bar{x}) d\bar{x}}{\{1+(\lambda-1)\bar{x}\}^4}$$

$$\frac{4L^2}{E\pi r^4} \left\{ \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{3\lambda^3} - \frac{\lambda+2}{6\lambda^3} \right\} \quad I_2 = \frac{2\lambda+1}{6\lambda^2} \times \frac{4L^2}{\pi r^4 E}$$

$$I_3 = \int_0^L \frac{dx}{EI_x} = \int_0^L \frac{dx}{E\frac{\pi r^4}{4}\{1+(\lambda-1)\bar{x}\}^4} = \frac{4L}{E\pi r^4} \int_0^1 \frac{d\bar{x}}{\{1+(\lambda-1)\bar{x}\}^4} = \frac{4L}{E\pi r^4} \cdot \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{3\lambda^3}$$

$$I_3 = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{3\lambda^3} \times \frac{4L}{E\pi r^4}$$

$$I_4 = \int_0^L \frac{dx}{GJ_x} = \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{6\lambda^3} \times \frac{4L}{G\pi r^4}$$

La matriz de flexibilidad es:

$$\begin{bmatrix} \theta_x \\ d_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \frac{4}{\pi r^4} \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{6\lambda^3} \times \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3\lambda} \times \frac{L^3}{E} & \frac{2\lambda+1}{6\lambda^2} \times \frac{L^2}{E} \\ 0 & \frac{2\lambda+1}{6\lambda^2} \times \frac{L^2}{E} & \frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{3\lambda^3} \times \frac{L}{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ Q_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez es inversa de la anterior, obteniéndose:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ Q_y \\ M_z \end{bmatrix} = \frac{\pi r^4}{4} \begin{bmatrix} \frac{G}{L} \frac{6\lambda^3}{\lambda^2 + \lambda + 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{L^3} 4\lambda(\lambda^2 + \lambda + 1) & -\frac{E}{L^2} 2\lambda^2(2\lambda + 1) \\ 0 & -\frac{E}{L^2} 2\lambda^2(2\lambda + 1) & \frac{E}{L} 4\lambda^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ d_y \\ \theta_z \end{bmatrix}$$

La matriz de equilibrio es:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz de rigidez de la pieza es:

$$k_{22} = \frac{\pi r^4}{4} \begin{bmatrix} \frac{6G}{L} \frac{\lambda^3}{\lambda^2 + \lambda + 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4E}{L^3} \lambda(\lambda^2 + \lambda + 1) & -\frac{2E}{L^2} \lambda^2(2\lambda + 1) \\ 0 & -\frac{2E}{L^2} \lambda^2(2\lambda + 1) & \frac{4E}{L} \lambda^3 \end{bmatrix}$$

$$k_{12} = -H k_{22} = \frac{\pi r^4}{4} \begin{bmatrix} -\frac{6G}{L} \frac{\lambda^3}{\lambda^2 + \lambda + 1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4E}{L^3} \lambda(\lambda^2 + \lambda + 1) & \frac{2E}{L^2} \lambda^2(2\lambda + 1) \\ 0 & -\frac{2E}{L^2} \lambda(\lambda + 2) & \frac{2E}{L} \lambda^2 \end{bmatrix} = k_{21}^T$$

$$k_{11} = H k_{22} H^T = \frac{\pi r^4}{4} \begin{bmatrix} \frac{6G}{L} \frac{\lambda^3}{\lambda^2 + \lambda + 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4E}{L^3} \lambda(\lambda^2 + \lambda + 1) & \frac{2E}{L^2} \lambda(\lambda + 2) \\ 0 & \frac{2E}{L^2} \lambda(\lambda + 2) & \frac{4E}{L} \lambda \end{bmatrix}$$



$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} = \frac{\pi \Gamma}{4} \begin{bmatrix} \frac{6G}{L} \frac{\lambda^3}{\lambda^2 + \lambda + 1} & 0 & 0 & -\frac{6G}{L} \frac{\lambda^3}{\lambda^2 + \lambda + 1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4E}{L^3} \lambda (\lambda^2 + \lambda + 1) & \frac{2E}{L^2} \lambda (\lambda + 2) & 0 & -\frac{4E}{L^3} \lambda (\lambda^2 + \lambda + 1) & \frac{2E}{L^2} \lambda^2 (2\lambda + 1) \\ 0 & \frac{2E}{L^2} \lambda (\lambda + 2) & \frac{4E}{L} \lambda & 0 & -\frac{2E}{L^2} \lambda (\lambda + 2) & \frac{2E}{L} \lambda^2 \\ -\frac{6G}{L} \frac{\lambda^3}{\lambda^2 + \lambda + 1} & 0 & 0 & \frac{6G}{L} \frac{\lambda^3}{\lambda^2 + \lambda + 1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4E}{L^3} \lambda (\lambda^2 + \lambda + 1) & -\frac{2E}{L^2} \lambda (\lambda + 2) & 0 & \frac{4E}{L^3} \lambda (\lambda^2 + \lambda + 1) & -\frac{2E}{L^2} \lambda^2 (2\lambda + 1) \\ 0 & \frac{2E}{L^2} \lambda^2 (2\lambda + 1) & \frac{2E}{L} \lambda^2 & 0 & -\frac{2E}{L^2} \lambda^2 (2\lambda + 1) & \frac{4E}{L} \lambda^3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio E2.6.

Deducir la matriz de rigidez de la pieza recta de sección constante ( $E, I, A$ ), plana, adoptando como elementos isostáticos las estructuras de la figura E2.6a.



Fig. E2.6 a

Considerando los grados de libertad del estado (1) de la figura E2.6a. las fuerzas que actúan se representan en la figura E2.6b.

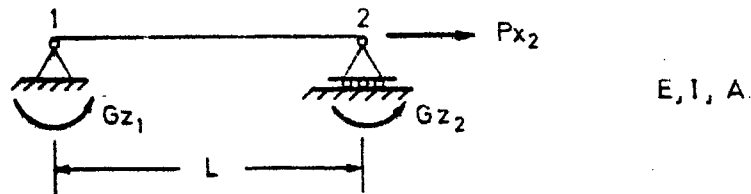


Fig. E 2 6b

El equilibrio se puede plantear como sigue:

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x2} \\ G_{z1} \\ G_{z2} \end{bmatrix} ; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ 0 & \frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

La energía  $U$  de deformación (no se considera la de formación por cortante) es:

$$U = \frac{1}{2} \int M^2 \frac{dL}{EI} + \frac{1}{2} \int N^2 \frac{dL}{EA}$$

$$U = \frac{1}{2} \int \left( \frac{G_{z2} + G_{z1}}{L} x - G_{z1} \right)^2 \frac{dx}{EI} + \frac{1}{2} \int P_{x2}^2 \frac{dL}{EA}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_{x2}} = \int_0^L P_{x2} \frac{dx}{EA} = \frac{L}{EA} \cdot P_{x2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial G_{z1}} = \int_0^L \left( \frac{G_{z2} + G_{z1}}{L} x - G_{z1} \right) \left( \frac{x}{L} - 1 \right) \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left\{ G_{z2} + G_{z1} \frac{x^3}{3L} - G_{z1} \frac{x^2}{2L} - \frac{G_{z2} + G_{z1}}{2L} x^2 + G_{z1} x \right\}_0^L$$

$$= (G_{z2} + G_{z1}) \frac{L}{3EI} - G_{z2} \frac{L}{2EI} = G_{z1} \frac{L}{3EI} - \frac{L}{6EI} G_{z2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial G_{z2}} = \int_0^L \left( \frac{G_{z2} + G_{z1}}{L} x - G_{z1} \right) \frac{x}{L} \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{G_{z2} + G_{z1}}{3L} \frac{x^3}{2} - G_{z1} \frac{x^2}{2L} \right\}_0^L =$$

$$-G_{z1} \frac{L}{6EI} + G_{z2} \frac{L}{3EI} ;$$

Es decir  $\frac{\partial U}{\partial \underline{P}} = \underline{F} \underline{P}$ , con  $\underline{F}$  matriz de flexibilidad, cuya

expresión es:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L}{3EI} & -\frac{L}{6EI} \\ 0 & -\frac{L}{6EI} & \frac{L}{3EI} \end{bmatrix}$$

siendo  $|\underline{F}| = \frac{L^3}{12EA(EI)^2}$

la inversa es:

$$\underline{F}^{-1} = \frac{1}{|\underline{F}|} \begin{bmatrix} \frac{L^2}{12(EI)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{3EAEI} & \frac{L^2}{6EIEA} \\ 0 & \frac{L^2}{6EIEA} & \frac{L^2}{3EAEI} \end{bmatrix}; \underline{F}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

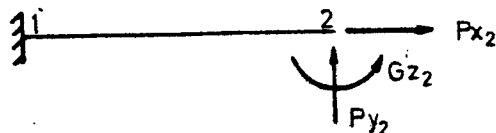
$$-\underline{H}\underline{F}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \end{bmatrix}; -\underline{H}\underline{F}^{-1}\underline{H}^T = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & +\frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix}$$

Con esto, se obtiene la matriz  $\underline{K}$ , con el orden de los grados de libertad (elementos de los vectores  $\underline{p}$  y  $\underline{d}$ ) que se indican:

$$\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{y2} \\ P_{x2} \\ G_{z1} \\ G_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & +\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{y2} \\ d_{x2} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

Apartado b)

Considerando el estado (2) de la figura E2.6a. se tienen las fuerzas de la figura E2.6c:



$$S^* = -HS$$

Fig. E 2.6c

El equilibrio es:

$$\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ G_{z1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ G_{z2} \end{bmatrix} ; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix}$$

La energía de deformación resulta:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (G_{z2} + P_{y2}x)^2 \frac{dx}{EI} + \frac{1}{2} \int_0^L P_{x2}^2 \frac{dx}{EA}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_{x2}} = \int_0^L P_{x2} \frac{dx}{EA} = \frac{L}{EA} \cdot P_{x2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial P_{y2}} = \int_0^L (G_{z2} + P_{y2}x) x \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left\{ G_{z2} \frac{x^2}{2} + P_{y2} \frac{x^3}{3} \right\}_0^L = \frac{L^3}{3EI} P_{y2} + \frac{L^2}{2EI} G_{z2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial G_{z2}} = \int_0^L (G_{z2} + P_{y2}x) \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left\{ G_{z2}x + P_{y2} \frac{x^2}{2} \right\}_0^L = \frac{L^2}{2EI} P_{y2} + G_{z2} \frac{1}{EI}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad \text{con } |F| = \frac{L^5}{EA} \cdot \frac{1}{12(EI)^2}$$

$$\underline{F}^{-1} = \frac{1}{|\underline{F}|} \begin{bmatrix} L^4 & 0 & 0 \\ 12(EI)^2 & \frac{L^2}{EA EI} & -\frac{L^3}{EA EI} \\ 0 & -\frac{L^3}{2EA EI} & \frac{L^4}{EA^3 EI} \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\underline{K}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \equiv \underline{F}^{-1}$$

$$\underline{H}\underline{F}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}\underline{F}^{-1}\underline{H}^T = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez tiene la siguiente expresión:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

donde K es la relativa a la ecuación siguiente:

$$\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ G_{z1} \\ P_{x2} \\ P_{y2} \\ G_{z2} \end{bmatrix} = \underline{K} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ \theta_{z1} \\ d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$



### Ejercicio E2.7.

Se conocen las características siguientes de una barra 1-2 de la figura E2.7a. de un entramado plano.

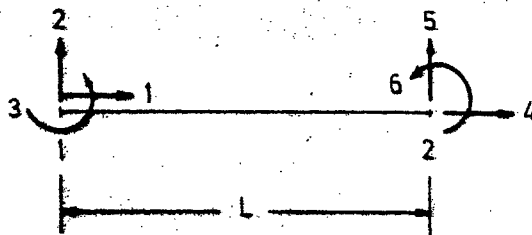


Fig. E2.7a

Rigideces:  $R_1$  y  $R_2$ .

Area constante:  $A$ .

Coefficientes de transmisión:  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{21}$ .

Se adopta como estructura básica la figura E2.7a. correspondiente a los grados de libertad (3, 6, 4).

Se pide:

- 1.- Matriz de rigidez elemental  $\underline{K}$ .
- 2.- Matrices de equilibrio y cinemáticas  $\underline{H}_1$  y  $\underline{H}_2$ .
- 3) Si se supone referida la barra a unos ejes generales que forman un ángulo  $\alpha$ , se pide la matriz de rigidez  $\underline{K}'$  (6 x 6). En estos nuevos ejes generales puede ponerse en la forma:  $\underline{K}' = \underline{B}^T \underline{K} \underline{B}$ . Se pide la expresión explícita de  $\underline{B}$ .
- 4) Si la pieza está articulada en un extremo o en los dos extremos, deducir las expresiones de  $\underline{B}$  correspondientes, adoptando siempre la expresión primitiva de  $\underline{K}$ .

1) Se considera la estructura básica de la figura E2.7b.

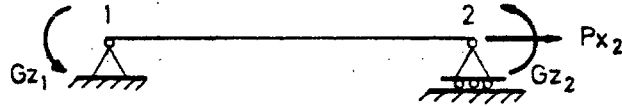


Fig. E2.7b.- Estructura básica

La matriz de rigidez es la del sistema siguiente:

$$\begin{bmatrix} \underline{P_1} \\ \underline{P_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{y2} \\ P_{x2} \\ G_{z1} \\ G_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{H} & \underline{K} & \underline{H}^T & -\underline{H} & \underline{K} \\ -\underline{K} & \underline{H}^T & & & \underline{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{y2} \\ d_{x2} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = \underline{K} \begin{bmatrix} \underline{d_1} \\ \underline{d_2} \end{bmatrix}$$

donde  $\underline{K} = \underline{F}^{-1}$

Haciendo  $\underline{d_1} = 0$ :  $\underline{P_2} = \underline{K} \cdot \underline{d_2}$  es decir:

$$\begin{bmatrix} P_{x2} \\ G_{z1} \\ G_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_{x2} \\ a_2 & b_2 & c_2 & \theta_{z1} \\ a_3 & b_3 & c_3 & \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

Para hallar los coeficientes se dan valores particulares a  $\underline{d_2}$ .

$$\underline{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$



Fig. E2.7c

$$\rightarrow \boxed{a_1 = \frac{EA}{L}}$$

$$\boxed{b_1 = c_1 = a_2 = a_3 = 0}$$

$$\underline{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

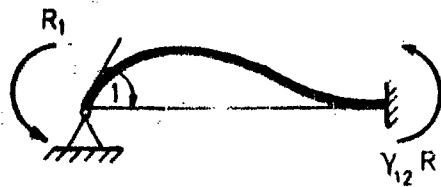


Fig. E2.7d

$$\begin{bmatrix} 0 \\ R_1 \\ Y_{12}R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$b_2 = R_1$
$b_3 = Y_{12}R_1$

$$\underline{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

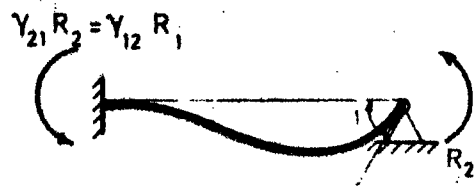


Fig. E2.7e

$$\begin{bmatrix} 0 \\ Y_{12}R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$c_2 = Y_{12}R_1$
$c_3 = R_2$

La Matriz elemental  $\underline{K}$  es:

$$\underline{K} = \underline{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & \gamma_{12}R_1 \\ 0 & \gamma_{12}R_1 & R_2 \end{bmatrix}$$

2) Se puede expresar el equilibrio siguiente:

$$\left. \begin{aligned} P_{x1} &= -P_{x2} \\ P_{y1} &= \frac{G_{z1}}{L} + \frac{G_{z2}}{L} \\ P_{y2} &= -\frac{G_{z1}}{L} - \frac{G_{z2}}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{y2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & -1/L \\ 0 & 1/L & 1/L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_{x2} \\ G_{z1} \\ G_{z2} \end{bmatrix}$$

Entonces las matrices de equilibrio y cinemática  $H_1$  y  $H_2$  son:

$$\underline{H}_1 = \underline{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & -1/L \\ 0 & 1/L & 1/L \end{bmatrix} ; \underline{H}_2 = \underline{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & -1/L \\ 0 & -1/L & 1/L \end{bmatrix}$$

$$-\underline{H}\underline{F}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 1/L \\ 0 & -1/L & -1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & \gamma_{12}R_1 \\ 0 & \gamma_{12}R_1 & R_2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_1(1+\gamma_{12})}{L} & \frac{R_2(1+\gamma_{21})}{L} \\ 0 & \frac{-R_1(1+\gamma_{12})}{L} & \frac{-R_2(1+\gamma_{21})}{L} \end{bmatrix}$$

$$\underline{H} \underline{F}^{-1} \underline{H}^T = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_1(1+\gamma_{12})}{L} & -\frac{R_2(1+\gamma_{21})}{L} \\ 0 & \frac{R_1(1+\gamma_{12})}{L} & \frac{R_2(1+\gamma_{21})}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_1(1+2\gamma_{12})+R_2}{L^2} & -\frac{R_1(1+2\gamma_{12})+R_2}{L^2} \\ 0 & -\frac{R_1(1+2\gamma_{12})+R_2}{L^2} & \frac{R_1(1+2\gamma_{12})+R_2}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$-\underline{F}^{-1} \underline{H}^T = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -R_1 & -\gamma_{12}R_1 \\ 0 & -\gamma_{12}R_1 & -R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/L & 1/L \\ 0 & -1/L & 1/L \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_1(1+\gamma_{12})}{L} & -\frac{R_1(1+\gamma_{12})}{L} \\ 0 & \frac{R_2(1+\gamma_{21})}{L} & -\frac{R_2(1+\gamma_{21})}{L} \end{bmatrix}$$

y la matriz de rigidez  $\underline{K}$  es:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_1(1+2\gamma_{12})+R_z}{L^2} & -\frac{R_1(1+2\gamma_{12})+R_2}{L^2} & 0 & \frac{R_1(1+\gamma_{12})}{L} & \frac{R_2(1+\gamma_{21})}{L} \\ 0 & -\frac{R_1(1+2\gamma_{12})+R_z}{L^2} & \frac{R_1(1+2\gamma_{12})+R_z}{L^2} & 0 & -\frac{R_1(1+\gamma_{12})}{L} & -\frac{R_2(1+\gamma_{21})}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R_1(1+\gamma_{12})}{L} & -\frac{R_1(1+\gamma_{12})}{L} & 0 & R_1 & \gamma_{12}R_1 \\ 0 & \frac{R_2(1+\gamma_{21})}{L} & -\frac{R_2(1+\gamma_{21})}{L} & 0 & \gamma_{12}R_1 & R_2 \end{bmatrix}$$

que corresponde a la ecuación:

$$\begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{y2} \\ P_{x2} \\ G_{z1} \\ G_{z2} \end{bmatrix} = \underline{K} \begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{y2} \\ d_{x2} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

3) Suponiendo el cambio de ejes definido en la figura E2.7f. se tiene:

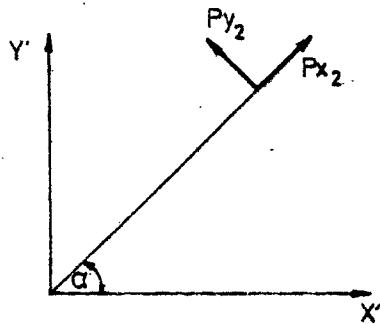


Fig. E2.7f. - Cambio de ejes

$$P'_{x2} = P_{x2} \cos \alpha - P_{y2} \sin \alpha$$

$$P'_{y2} = P_{x2} \sin \alpha + P_{y2} \cos \alpha$$

$$G'_{z2} = G_{z2}$$

$$P'_{x1} = P_{x1} \cos \alpha - P_{y1} \sin \alpha$$

$$P'_{y1} = P_{x1} \sin \alpha + P_{y1} \cos \alpha$$

$$G'_{z1} = G_{z1}$$

$$d_{x2} = d'_{x2} \cos \alpha + d'_{y2} \sin \alpha$$

$$d_{y2} = -d'_{x2} \sin \alpha + d'_{y2} \cos \alpha$$

$$\theta_{z2} = \theta_{z2}$$

$$d_{x1} = d'_{x1} \cos \alpha + d'_{y1} \sin \alpha$$

$$d_{y1} = -d'_{x1} \sin \alpha + d'_{y1} \cos \alpha$$

$$\theta_{z1} = \theta'_{z1}$$

$$\begin{bmatrix} P'_{x1} \\ P'_{y1} \\ P'_{y2} \\ P'_{x2} \\ G'_{z1} \\ G'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{y2} \\ P_{x2} \\ G_{z1} \\ G_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{y2} \\ d_{x2} \\ \theta_{z1} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{x1} \\ d'_{y1} \\ d'_{y2} \\ d'_{x2} \\ \theta'_{z1} \\ \theta'_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) Las nuevas fuerzas son función de las de la matriz fila  $\underline{p}^t = (P_{x1} \ P_{y1} \ P_{y2} \ P_{x2} \ G_{z1} \ G_{z2})$ . Para el caso articulado en el extremo 1 ( $G_{z1}=0$ ) y considerando ejes de barra se tiene (ver figura E2.7g.):

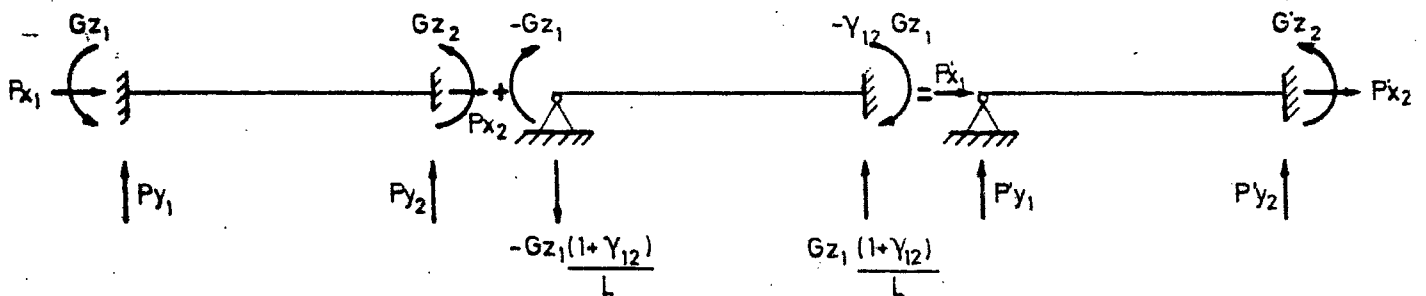


Fig. E2.7g



$$\left. \begin{aligned}
 P'_{x1} &= P_{x1} \\
 P'_{y1} &= P_{y1} - \frac{(1+\gamma_{12})}{(1+\frac{\gamma_{12}}{L})} G_{z1} \\
 P'_{y2} &= P_{y2} + \frac{(1+\gamma_{12})}{L} G_{z1} \\
 P'_{x2} &= P_{x2} \\
 G'_{z1} &= 0 \\
 G'_{z2} &= -\gamma_{12} G_{z1} + G_{z2}
 \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} P'_{x1} \\ P'_{y1} \\ P'_{y2} \\ P'_{x2} \\ G'_{z1} \\ G'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1+\gamma_{12}}{1+\frac{\gamma_{12}}{L}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1+\gamma_{12}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{12} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{y2} \\ P_{x2} \\ G_{z1} \\ G_{z2} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\underline{B}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1+\gamma_{12}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1+\gamma_{12}}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_{12} & 1 \end{bmatrix}$$

Para el caso biarticulado ( $G_{z1} = 0$  y  $G_{z2} = 0$ ) se tiene(ver figura E2.7h.):

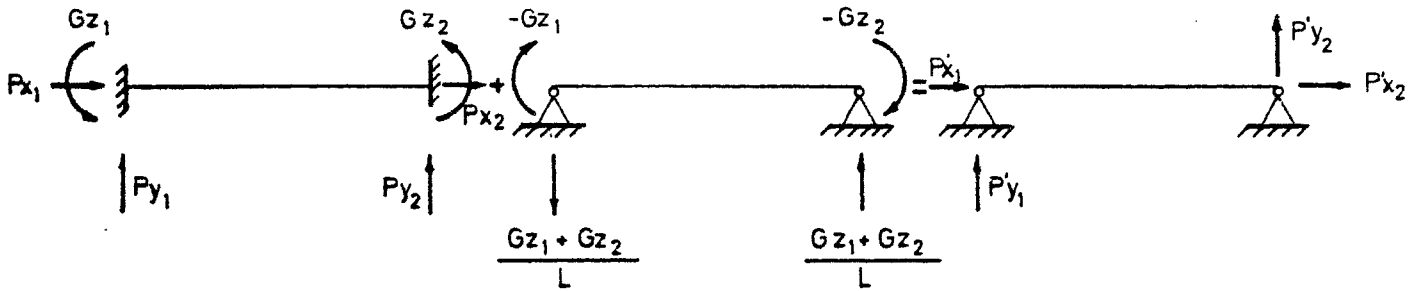


Fig. E2.7h

$$\left. \begin{aligned} P'_{x1} &= P_{x1} \\ P'_{y1} &= P_{y1} - \frac{1}{L}G_{z1} - \frac{1}{L}G_{z2} \\ P'_{y2} &= P_{y2} + \frac{1}{L}G_{z1} + \frac{1}{L}G_{z2} \\ P'_{x2} &= P_{x2} \\ G'_{z1} &= 0 \\ G'_{z2} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} P'_{x1} \\ P'_{y1} \\ P'_{y2} \\ P'_{x2} \\ G'_{z1} \\ G'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/L & -1/L \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/L & 1/L \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ P_{y2} \\ P_{x2} \\ G_{z1} \\ G_{z2} \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\underline{B}^T =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/L & -1/L \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/L & 1/L \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio E2.8.

Determinar la matriz de rigidez de una pieza recta de sección constante, considerando la deformación por cortante, mediante:

- a) Teorema de Castigliano. Solución exacta.
- b) Método de los elementos finitos.



Fig. E2.8 a

$A$ ,  $I$ ,  $A'$  son el área, inercia y área reducida de cortante.

$E$  y  $G$  son los módulos de elasticidad y cortante.

a) Se adopta el sistema isostático básico que se indica en la figura E2.8b.

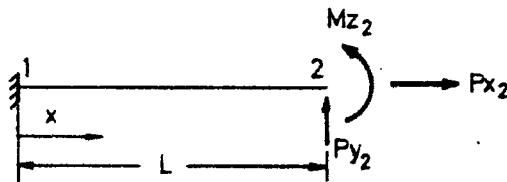


Fig.E2.8b

Sea  $\underline{s} = \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}$  matriz en esfuerzos que actúan en el nudo 2.

Los correspondientes movimientos en ese nudo (deformaciones) son:

$$e = \frac{\partial U}{\partial \underline{s}}$$

$$\text{en donde } U = \frac{1}{2} \int_0^L M^2 \frac{dx}{EI} + \frac{1}{2} \int_0^L N^2 \frac{dx}{EA} + \frac{1}{2} \int_0^L Q^2 \frac{ds}{GA}$$

$$\text{con } M = M_{z2} + P_{y2} \cdot (L-x)$$

$$N = P_{x2}$$

$$Q = P_{y2} \quad \text{y} \quad e = (e_{x2}, e_{y2}, e_{\theta2})^T$$

Entonces, llevando a cabo las integrales anteriores, se obtiene:

$$e_{x2} = \frac{\partial U}{\partial P_{x2}} = \int_0^L P_{x2} \frac{dx}{EA} = P_{x2} \frac{L}{EA}$$

$$e_{y2} = \frac{\partial U}{\partial P_{y2}} = \int_0^L \{M_{z2} + P_{y2}(L-x)\} x \, dx + \int_0^L P_{y2} \frac{dx}{GA} = M_{z2} \frac{L^2}{2EI} + P_{y2} \frac{L^3}{3EI} + P_{y2} \frac{L}{GA}$$

$$e_{\theta2} = \frac{\partial U}{\partial M_{z2}} = \int_0^L \{M_{z2} + P_{y2}(L-x)\} = M_{z2} \frac{L}{EI} + P_{y2} \frac{L^2}{2EI}$$

es decir

$$\underline{e} = \underline{F} \underline{s}$$

con  $\underline{F} =$

$$\begin{bmatrix} \frac{L}{EA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} + \frac{L}{6AI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix}$$

$$\underline{S} = \underline{F}^{-1} \underline{e} = \underline{K} \underline{e},$$

con

$$\underline{K} = \underline{F}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\frac{L}{6AI} + \frac{L^2}{12EI}} & \frac{-1}{\frac{2}{6AI} + \frac{L^2}{6EI}} \\ 0 & \frac{-1}{\frac{2}{6AI} + \frac{L^2}{6EI}} & \frac{EI}{L} + \frac{L}{\frac{4}{6AI} + \frac{L^2}{3EI}} \end{bmatrix}$$

Para calcular  $\underline{H}$  se tiene en cuenta la figura E2.8b.

$$\underline{S}^* = \begin{bmatrix} P_{x1} \\ P_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = -\underline{H} \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L & 1 \end{bmatrix}; \quad \underline{H}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$-\underline{H}\underline{F}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\frac{L}{6AI} + \frac{L^2}{12EI}} & \frac{+1}{\frac{2}{6AI} + \frac{L^2}{6EI}} \\ 0 & \frac{-1}{\frac{2}{6AI} + \frac{L^2}{6EI}} & \frac{-EI}{L} + \frac{L}{\frac{4}{6AI} + \frac{L^2}{3EI}} \end{bmatrix}$$

$$-\underline{F}^{-1} \underline{H}^T =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{\frac{L}{GA^T} + \frac{L^3}{12EI}} & \frac{-1}{\frac{2}{GA^T} + \frac{L^2}{6EI}} \\ 0 & \frac{1}{\frac{2}{GA^T} + \frac{L^2}{6EI}} & -\frac{EI}{L} + \frac{L}{\frac{4}{GA^T} + \frac{L^2}{3EI}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{H} \underline{F}^{-1} \underline{H}^T =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\frac{L}{GA^T} + \frac{L^3}{12EI}} & \frac{1}{\frac{2}{GA^T} + \frac{L^2}{6EI}} \\ 0 & \frac{1}{\frac{2}{GA^T} + \frac{L^2}{6EI}} & \frac{EI}{L} + \frac{L}{\frac{4}{GA^T} + \frac{L^2}{3EI}} \end{bmatrix}$$

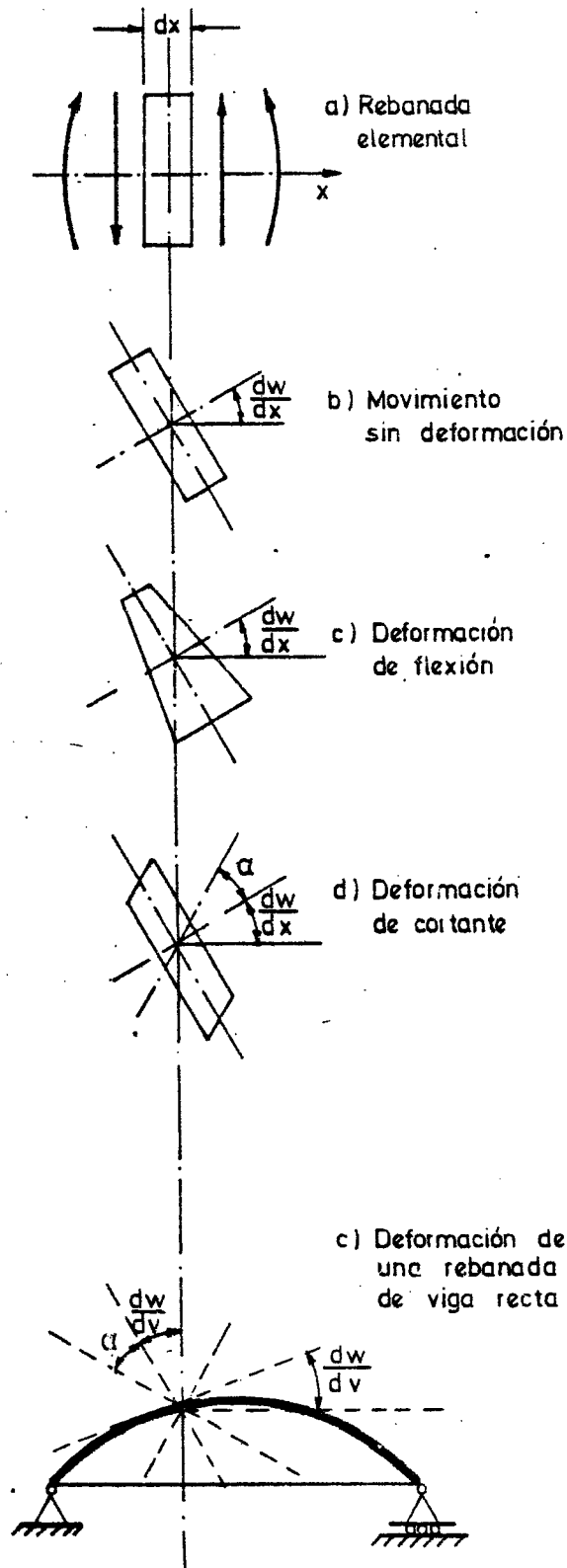
Luego, la matriz de rigidez es:

$\underline{K} =$

$$\begin{array}{cc|cc|cc}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{1}{\frac{L}{GA^T} + \frac{L^3}{12EI}} & \frac{1}{\frac{2}{GA^T} + \frac{L^2}{6EI}} & 0 & \frac{-1}{\frac{L}{GA^T} + \frac{L^3}{12EI}} & \frac{1}{\frac{2}{GA^T} + \frac{L^2}{6EI}} \\
 0 & \frac{1}{\frac{2}{GA^T} + \frac{L^2}{6EI}} & \frac{EI}{L} + \frac{L}{\frac{4}{GA^T} + \frac{L^2}{3EI}} & 0 & \frac{-1}{\frac{2}{GA^T} + \frac{L^2}{6EI}} & -\frac{EI}{L} + \frac{L}{\frac{4}{GA^T} + \frac{L^2}{3EI}} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-1}{\frac{L}{GA^T} + \frac{L^3}{12EI}} & \frac{-1}{\frac{2}{GA^T} + \frac{L^2}{6EI}} & 0 & \frac{1}{\frac{L}{GA^T} + \frac{L^3}{12EI}} & \frac{-1}{\frac{2}{GA^T} + \frac{L^2}{6EI}} \\
 0 & \frac{1}{\frac{2}{GA^T} + \frac{L^2}{6EI}} & -\frac{EI}{L} + \frac{L}{\frac{4}{GA^T} + \frac{L^2}{3EI}} & 0 & \frac{-1}{\frac{2}{GA^T} + \frac{L^2}{6EI}} & \frac{EI}{L} + \frac{L}{\frac{4}{GA^T} + \frac{L^2}{3EI}}
 \end{array}$$

b) Método de los elementos finitos.

Conviene redefinir el vector deformación y las variables de campo, ya que ahora no es únicamente la flecha  $w$ , sino el ángulo de giro de la sección,  $\theta$ .



Según la figura E2.8c. se tiene:

$$\frac{dw}{dx} + \alpha = \theta.$$

con  $w$  flecha

$\alpha$  giro debido al cortante.

$\theta$  ángulo de giro total de la sección. Así, pues, en una sección genérica de una viga no son iguales  $\theta$  y  $\frac{dw}{dx}$ , si se considera la deformación por cortante. El vector de campo es pues

$$\underline{u} = (w, \theta)^T.$$

Las ecuaciones constitutivas son

$$M = \frac{1}{EI} \frac{d\theta}{dx}$$

$$\theta = \frac{1}{GA} \alpha.$$

La energía de deformación de una barra es entonces:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L GA' \left( \theta - \frac{dw}{dx} \right)^2 dx;$$

{E2.8a.}

Se adoptan como funciones de forma para un elemento las lineales, ya que el pro

Fig. E2.8c



blema es  $C$ ; Por lo tanto  $w = (N_1, N_2) \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$  y  $\theta = (N_1, N_2) \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$  {E2.8b.}

Los grados de libertad del elemento de flexión se ven en la figura E2.8e.

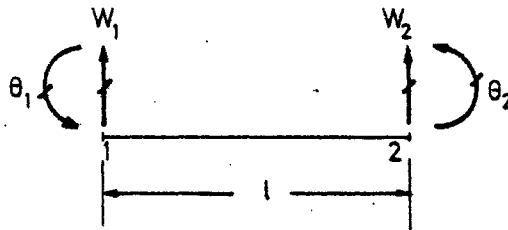


Fig. E2.8d. - Elemento de flexión

Siendo

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{x}{L}.$$

El vector deformación es:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{d\theta}{dx} \\ \alpha \end{bmatrix}$$

y el correspondiente vector tensión  $\sigma$  es:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} M \\ \theta \end{bmatrix}$$

La relación deformación-desplazamientos, se obtiene a partir de la expresión:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \theta & \frac{d}{dx} \\ -\frac{d}{dx} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix} = L \underline{u}$$

Por lo tanto

$$\underline{\varepsilon} = \{ \underline{B}_1 \quad \underline{B}_2 \} \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \end{bmatrix} = \underline{B} \underline{d}$$

con  $\underline{d}_i = \{w_i, \theta_i\}$  vector de desplazamientos (incógnitas básicas) en el nudo  $i$ .

$$\underline{B}_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dN_i}{dx} \\ -\frac{dN_i}{dx} & N_i \end{bmatrix}$$

La matriz elástica del material  $\underline{D}$ , es

$$\underline{D} = \text{diag.}\{EI, GA'\}$$

Por lo tanto la matriz de rigidez, es:

$$\underline{k} = \int_0^L \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dx.$$

No obstante, conviene, por razones de estabilidad numérica, separar las contribuciones de las deformaciones por cortante y flexión en la matriz de rigidez. Por lo que si se sustituyen las expresiones {E2.8b.} en {E2.8a.}, se obtiene (se supone sección constante):

$$U = \frac{EI}{2} \underline{\theta}^T \left\{ \int_0^L \begin{bmatrix} N_{1,x}^2 & N_{1,x} N_{2,x} \\ N_{1,x} N_{2,x} & N_{2,x}^2 \end{bmatrix} dx \right\} \underline{\theta} +$$

$$\frac{GA'}{2} \{ \underline{w}^T, \underline{\theta}^T \} \left\{ \int_0^L \begin{bmatrix} N_{1,x}^2 & N_{1,x} N_{2,x} & -N_{1,x} N_1 & -N_{1,x} N_2 \\ N_{2,x}^2 & N_{2,x} N_1 & -N_{2,x} N_1 & -N_{2,x} N_2 \\ -N_{1,x} N_1 & -N_{2,x} N_1 & N_1^2 & N_1 N_2 \\ -N_{1,x} N_2 & -N_{2,x} N_2 & N_1 N_2 & N_2^2 \end{bmatrix} dx \right\} \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\text{con } N_{i,x} = \frac{\partial N_i}{\partial x}, \quad \underline{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{como } \int_0^L N_{i,x}^2 dx = \frac{1}{L} \quad \int_0^L N_{i,x} N_{j,x} dx = -\frac{1}{L} \quad i \neq j$$

$$\int_0^L N_{1,x} N_{i,x} dx = \frac{1}{2} \quad \int_0^L N_{2,x} N_{i,x} dx = -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^L N_i^2 dx = \frac{1}{3} \quad \int_0^L N_i N_j dx = \frac{L}{6}$$

Se deduce

$$U = \frac{EI}{2L} \underline{\theta}^T \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \underline{\theta} + \frac{GA'}{2L} \{ \underline{w}^T, \underline{\theta}^T \} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -L/2 & -L/2 \\ -1 & 1 & L/2 & L/2 \\ -\frac{L}{2} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{3} & \frac{L^2}{6} \\ -\frac{L}{2} & \frac{L}{2} & \frac{L^2}{6} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w} \\ \underline{\theta} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez es; evidentemente:

$$k = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & -k_2 \frac{L}{2} & -k_2 \frac{L}{2} \\ -k_2 & -k_2 & k_2 \frac{L}{2} & k_2 \frac{L}{2} \\ -k_2 \frac{L}{2} & k_2 \frac{L}{2} & k_1 + k_2 \frac{L^2}{3} & -k_1 + k_2 \frac{L^2}{6} \\ -k_2 \frac{L}{2} & k_2 \frac{L}{2} & -k_1 + k_2 \frac{L^2}{6} & k_1 + k_2 \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} \text{ con } k_1 = \frac{EI}{L} \text{ y } k_2 = \frac{GA'}{L}$$

El problema fundamental con la consideración del cortante en la matriz de rigidez, es la posible inestabilidad numérica que aparece. Si  $k$  es el canto de la viga, se denomina factor de aspecto al valor  $\frac{h}{L}$ . Las características mecánicas de la viga son  $I = \frac{1}{12} b h^3$  y  $A' = k b h$  (con  $k$  dependiendo del tipo de sección) siendo  $b$  el ancho de la sección (se supone, la sección rectangular, pero es aplicable a cualquier sección general).

$$\text{Para el valor } k_1 + k_2 \frac{L^2}{3} = \frac{1}{12} b h^3 + k b h \frac{L^2}{3} = b \frac{h}{3} L^2 \left\{ k + \frac{1}{12} \frac{h^2}{L^2} \right\}$$

Se comprende que si el factor de aspecto  $\frac{h}{L}$ , es pequeño, en el elemento (caso normal de vigas delgadas), la contribución de la flexión es despreciable, es decir  $\frac{h}{L} \ll 1$  y con mayor motivo  $\frac{1}{12} \left( \frac{h}{L} \right)^2 \ll k$ , y no puede ser recogida en el cálculo con un computador que trabaja con un número finito de cifras significativas.

Existe la técnica de la integración reducida, con objeto de obviar el problema anterior. Se utiliza, un solo punto de Gauss, para evaluar las integrales de contribución

del cortante, en los casos de vigas delgadas ( $\frac{h}{L} < 1$ ). En otras situaciones, se calcula exactamente.

Ejercicio E2.9.

Determinar la matriz de rigidez de una viga de longitud infinita (viga semi-infinita) y sección constante Figura E2.9., considerada como un elemento de emparrillado plano. Se supone que esta viga se encuentra inmersa en un medio elástico, de módulo de balasto a desplazamientos verticales ( $k_w$ ) y a giros de torsión ( $k_\theta$ ). Las características elasto-mecánicas de la barra son:  $EI$ ,  $GJ$ .

No se considera la deformación por cortante ni el alabeo de la sección.

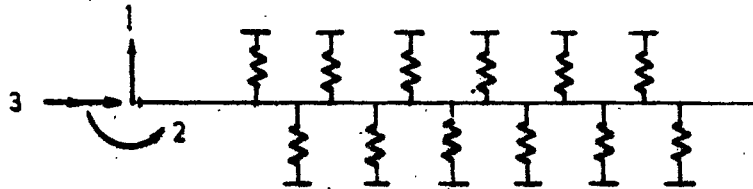


Fig. E2.9a. - Viga infinita. Grados de libertad

La ecuación de la flexión es:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + k_w w = 0 \quad \text{si} \quad \beta^4 = \frac{k_w}{4EI} \quad \text{se tiene}$$

$$w^{IV} + 4\beta^4 w = 0 \quad \text{para} \quad x \in (0, \infty)$$

Las condiciones de borde son:

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0, \quad w'_0 = \theta_0 \\ EI w''_0 &= M_0, \quad -EI w'''_0 = Q_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{para } x=0$$

valores finitos de  $w$  para  $x = \infty$

La solución del problema anterior es:

$$w(x) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x) e^{-\beta x}$$

Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ w'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}''_0 \\ \bar{w}'''_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

$$\text{con } \bar{w}_0 = \frac{1}{\beta} w'_0, \quad \bar{w}'_0 = \frac{1}{\beta^2} w''_0 \quad \text{y} \quad \bar{w}''_0 = \frac{1}{\beta^3} w'''_0$$

Eliminando  $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$  se tiene:

$$\begin{bmatrix} \bar{w}''_0 \\ \bar{w}'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} w_0 \\ w'_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w'_0 \end{bmatrix}$$

resulta por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} Q_0 \\ M \end{bmatrix} = 2EI \begin{bmatrix} 2\beta^3 & \beta^2 \\ \beta^2 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w'_0 \end{bmatrix}$$

La ecuación diferencial de la torsión es:

$$GJ \frac{d^2 \theta}{dx^2} + k_\theta \theta = 0 \quad \text{si} \quad \lambda^2 = \frac{k_\theta}{GJ}$$

es decir

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \lambda^2\theta = 0$$

con las condiciones de borde:

$$\theta = \theta_0 \quad \text{y} \quad GJ \frac{d\theta}{dx} = T_0 \quad \text{para} \quad x=0$$

valores finitos de  $\theta$       para       $x=\infty$

La solución es:

$$\theta = A \cos \lambda x$$

Por lo tanto

$$A = \theta_0 \quad \text{y} \quad GJ\lambda A = T_0$$

Eliminando A, se obtiene la rigidez

$$T_0 = GJ\lambda \theta_0$$

La matriz de rigidez pedida, es por consiguiente:

$$\begin{bmatrix} \theta_y \\ G_z \\ G_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4EI\beta^2 & 2EI\beta^2 & 0 \\ 2EI\beta^2 & 2EI\beta & 0 \\ 0 & 0 & GJ\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_y \\ \theta_z \\ \theta_x \end{bmatrix}$$

$$\text{con } \beta^4 = \frac{k_w}{4EI} \quad \text{y} \quad \lambda^2 = \frac{k_\theta}{GJ}$$

NOTA.

La matriz propuesta puede servir para modelar losas muy largas mediante el método del emparrillado. En esa dirección se puede aproximar los valores de  $\beta$  y  $\lambda$  como sigue, obtenidos al determinar el coeficiente de balasto, o relación carga/flecha, que al movimiento de la viga opone las vigas transversales del emparrillado:

$$1) \quad \beta \approx \sqrt[4]{\frac{1}{4\pi b L^3}}$$

con L luz transversal de la losa  
b ancho de la viga infinita

$\bar{f}$  factor de la flecha producida por una carga unidad puntual aplicada en el arranque de la viga, es decir

$$f = \bar{f} \frac{(P=1)L^3}{EI}$$

Por ejemplo  $\bar{f} = \frac{1}{48}$  simplemente apoyada con carga en el centro de la luz.

Como tanteo se puede suponer  $\frac{L}{3} < \beta^{-1} < \frac{L}{5}$  (en losas biapoyadas o empotradas) y  $\beta^{-1} \approx \frac{L}{3}$  (en voladizos), para el valor máximo de  $\beta$ . Ver figura E2.9b.

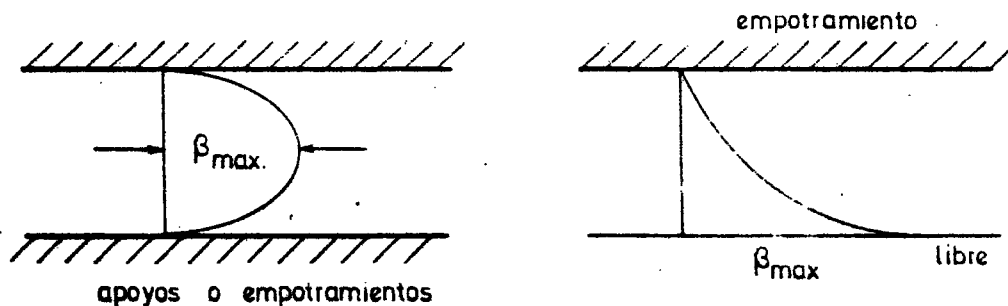


Fig. E2.9b.- Interpolación del módulo de balasto

Figura E2.9b. Interpolación del módulo de balasto

$$2) \quad \lambda = \sqrt{\frac{1}{(1+\nu)\bar{\theta}bL}}$$

siendo  $b$  y  $L$  cantidades anteriormente definidas y  $\bar{\theta}$  el coeficiente adimensional del giro  $\theta$  producido por un momento - unidad aplicado a la viga, es decir  $\theta = \bar{\theta} \frac{(M=1)L}{EI}$ . Por ejemplo  $\bar{\theta} = \frac{1}{42}$  en una viga simplemente apoyada con carga en el centro de la luz.



Ejercicio E2.10.

Resolver idéntico problema al 2.9., considerando la existencia de un módulo de balasto al giro longitudinal  $k_\psi$ .

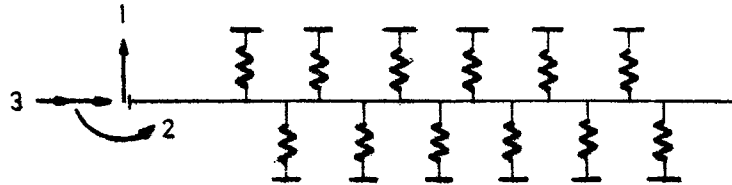


Fig. E2.10 a.-Viga infinita. Grados de libertad

Se supone por lo tanto la actuación de las siguientes cargas repartidas (se tiene en cuenta solo la flexión, - ya que la torsión está desacoplada y se resuelve igual que en E2.9.):

Fuerza vertical  $-k_w w$

Momento  $-k_\psi \psi = -k_\psi \frac{dw}{dx}$

Equilibrio de una rebanada (ver figura E2.10b.):

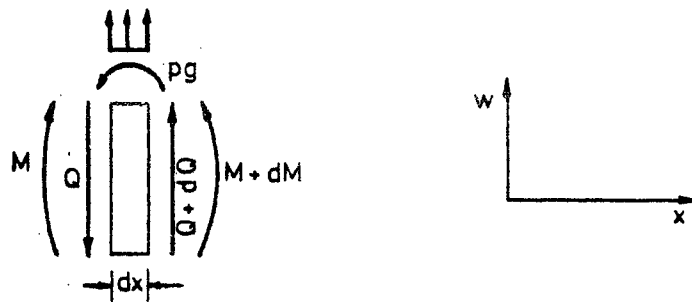


Fig. E2. 10 b

$$\frac{dQ}{dx} + p = 0$$

es decir

$$\frac{dQ}{dx} - k_w w = 0$$

$$+\frac{dM}{dx} + Q = 0$$

es decir

$$\frac{dM}{dx} + Q - k_\psi \frac{dw}{dx} = 0$$

Relación constitutiva es una rebanada

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M$$

Por lo tanto, se obtiene la ecuación diferencial general:

$$\frac{d^2}{dx^2} (EI \frac{d^2 w}{dx^2}) - \frac{d}{dx} (k_\psi \frac{dw}{dx}) + k_w w = 0$$

o bien en este caso

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} - k_\psi \frac{d^2 w}{dx^2} + k_w w = 0 \quad \text{en} \quad x \in (0, 1).$$

Con las condiciones cinemáticas (esenciales):

$$w=w_0 \quad \frac{dw}{dx} = \psi_0$$

y las condiciones estáticas (naturales):

$$-EI \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0 \quad EI \frac{d^3 w}{dx^3} - k_\psi \frac{dw}{dx} = Q_0$$

para la sección origen  $x=0$ . Los valores anteriores deben de ser finitos para  $x=\infty$ .

Para la resolución de la ecuación diferencial, conviene distinguir tres casos:

1) Debil amortiguamiento del balasto  $k_\psi$ , es decir:

$$k_\psi^2 - 4EI k_w < 0.$$

2) Fuerte amortiguamiento del balasto  $k_\psi$ , es decir:

$$k_\psi^2 - 4EI k_w > 0.$$

3) Valor crítico del módulo de balasto  $k_\psi$ , es decir:

$$k_\psi^2 - 4EI k_w = 0.$$

Se estudia a continuación cada uno de los casos anteriores:

1) Caso:  $k_\psi^2 - 4EI k_w < 0$

$$\text{Se denomina } \beta^4 = \frac{k_w}{EI} \quad \text{y} \quad \cos \alpha = \frac{k_\psi}{2\beta^2 EI}$$

La ecuación diferencial resulta:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - 2\beta^2 \cos \alpha \frac{d^2 w}{dx^2} + \beta^4 = 0$$

La ecuación característica tiene como raíces:

$$t = \pm \beta \left( \cos \frac{\alpha}{2} \pm i \sin \frac{\alpha}{2} \right)$$

De éstas, por la condición de solución finita en  $x=0$ , solo se considera la correspondiente a la parte real negativa, es decir, la solución es:

$$w = e^{-rx} (c_1 \cos sx + c_2 \sin sx)$$

$$\text{con } r = \beta \cos \frac{\alpha}{2} \quad s = \beta \sin \frac{\alpha}{2}$$

Las derivadas de  $w$  son (ver nota al final del ejercicio):

$$\rho = -\beta \quad \psi = -\frac{\alpha}{2}$$

$$c_1^{(0)} = c_1 \quad c_2^{(1)} = c_2$$

$$c_1^{(1)} = -(c_1 \cos \frac{\alpha}{2} - c_2 \sin \frac{\alpha}{2}) \beta$$

$$c_2^{(1)} = -(c_1 \cos \frac{\alpha}{2} + c_2 \sin \frac{\alpha}{2}) \beta$$

$$c_1^{(2)} = (c_1 \cos \alpha - c_2 \sin \alpha) \beta^2$$

$$c_2^{(2)} = (c_1 \cos \alpha + c_2 \sin \alpha) \beta^2$$

$$c_1^{(3)} = -(c_1 \cos \frac{3\alpha}{2} - c_2 \sin \frac{3\alpha}{2}) \beta^3$$

$$c_3^{(2)} = -(c_1 \cos \frac{3\alpha}{2} + c_2 \sin \frac{3\alpha}{2}) \beta^3$$

$$w^{(n)} = e^{-rx} \{ c_1^{(n)} \cos sx + c_2^{(n)} \sin sx \} \quad n = 0, 1, 2, 3.$$

Las condiciones en el borde  $x=0$ , son:

$$w_0 = c_1$$

$$\frac{1}{\beta} \psi_0 = -c_1 \cos \frac{\alpha}{2} + c_2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{1}{\beta^2} M_0 = EI \{-c_1 \cos \alpha + c_2 \sin \alpha\}$$

$$\frac{1}{\beta^3} Q_0 = -EI \{ c_1 \cos \frac{3\alpha}{2} - c_2 \sin \frac{3\alpha}{2} \} + 2EI \cos \alpha \{ c_1 \cos \frac{\alpha}{2} - c_2 \sin \frac{\alpha}{2} \}$$

es decir, en forma matricial:

$$\begin{aligned} \underline{\bar{d}} &= \begin{bmatrix} w_0 \\ \frac{1}{\beta} \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \underline{G_d} \underline{c} \\ \underline{\bar{p}} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta^3} Q_0 \\ \frac{1}{\beta^2} M_0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & -\sin \frac{\alpha}{2} \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \underline{G_p} \underline{c} \end{aligned}$$

Eliminando  $\underline{c}$  se obtiene:

$$\underline{\bar{p}} = \underline{G_p} \underline{G_d}^{-1} \underline{\bar{d}}$$

siendo

$$G_p G_d^{-1} = \frac{EI}{\sin \frac{\alpha}{2}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} & \sin \frac{\alpha}{2} \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \frac{\alpha}{2} & 0 \\ \cos \frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 2 \cos \frac{\alpha}{2} & 0 \\ 1 & 2 \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez es k:

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 2\beta^3 \cos \frac{\alpha}{2} & \beta^2 \\ \beta^2 & 2\beta \cos \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \underline{k} \underline{d}$$

2) Caso  $k_{\psi}^2 - 4EI k_w > 0$ .

Si se denomina  $\beta^4 = \frac{k_w}{EI}$  y  $Ch\alpha = \frac{k_{\psi}}{2\beta^2 EI}$ , la ecuación

diferencial se convierte en:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - 2\beta^2 Ch\alpha \frac{d^2 w}{dx^2} + \beta^4 w = 0$$

Las raíces de la ecuación característica son:

$$t = \pm \beta (Ch\alpha \pm Sh\alpha)^{1/2}$$

Por la condición de valor finito en  $x=\infty$ , solo se consideran las dos raíces negativas. La solución general es entonces:

$$w = C_1 e^{t_1 Bx} + C_2 e^{t_2 Bx}$$

con  $t_1 = (Ch\alpha + Sh\alpha)^{1/2}$  y  $t_2 = (Ch\alpha - Sh\alpha)^{1/2}$ .

La derivada n-sima, es:

$$w^{(n)} = C_1 (-t_1)^n e^{-t_1 \beta x} + C_2 (-t_2)^n e^{-t_2 \beta x}$$

Las condiciones de borde son:

$$w_0 = C_1 - C_2$$

$$\frac{1}{\beta} \psi_0 = -(C_1 t_1 + C_2 t_2)$$

$$\frac{1}{\beta^2} M_0 = -EI (C_1 t_1^2 + C_2 t_2^2)$$

$$\frac{1}{\beta^3} Q_0 = -EI (C_1 t_1^3 + C_2 t_2^3) + 2Ch\alpha EI (C_1 t_1 + C_2 t_2)$$

o en forma matricial

$$\underline{\underline{d}} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \frac{1}{\beta} \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -t_1 & -t_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{G_d}} \underline{\underline{C}}$$

$$\underline{\underline{p}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta^3} Q_0 \\ \frac{1}{\beta^2} M_0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} t_1 t_2^2 & t_1^2 t_2 \\ -t_1^2 & -t_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{G_p}} \underline{\underline{C}}$$

Eliminando  $\underline{C}$  se deduce

$$\underline{P} = \underline{G}_p \underline{G}_d^{-1} \underline{d}$$

$$\text{con } \underline{G}_p \underline{G}_d^{-1} = \frac{EI}{t_1 - t_2} \begin{bmatrix} t_1 t_2^2 & t_1^2 t_2 \\ -t_1^2 & -t_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -t_2 & -1 \\ t_1 & 1 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} t_1 + t_2 & 1 \\ 1 & t_1 + t_2 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez es, considerando que  $t_1 + t_2 = 2 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}$ :

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 2\beta^3 \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} & \beta^2 \\ \beta^2 & 2\beta \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \underline{k} \underline{d}$$

3) Caso crítico  $k_{\psi}^2 - 4EI k_w = 0$

La ecuación diferencial es:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - 2\beta^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \beta^4 = 0 \quad \text{siendo} \quad \beta^4 = \frac{k_w}{EI} \quad \text{y} \quad k_{\psi} = 2\beta^2 EI$$

Las raíces (dobles) de la ecuación característica son:

$$t = \pm \beta$$

Solo se considera  $t = -\beta$ , por la condición de valores finitos en  $x = \infty$ , la solución general es:

$$w = (C_1 \beta x + C_2) e^{-\beta x}$$

La derivada n-sima de esta ecuación se obtiene, según se indica en la nota final de este ejercicio:

$$w^{(n)} = (C_1^{(n)} \beta x + C_2^{(n)}) e^{-\beta x}$$

con

$$C_1^{(n)} = (-\beta)^n C_1$$

$$C_2^{(n)} = n(-\beta)^{n-1} \beta C_1 + (-\beta)^n C_2 = (-\beta)^n C_2 = (-\beta)^n \{-nC_1 + C_2\}$$

Es decir

$$C_1^{(0)} = C_1,$$

$$C_2^{(0)} = C_2$$

$$C_1^{(1)} = -\beta C_1,$$

$$C_2^{(1)} = -\beta \{-C_1 + C_2\}$$

$$C_1^{(2)} = \beta^2 C_1,$$

$$C_2^{(2)} = \beta^2 \{-2C_1 + C_2\}$$

$$C_1^{(3)} = -\beta^3 C_1,$$

$$C_2^{(3)} = -\beta^3 \{-3C_1 + C_2\}$$

Las condiciones de borde, producen los resultados:

$$w_0 = C_2$$

$$\frac{1}{\beta} \psi_0 = C_1 - C_2$$



$$\frac{1}{\beta^2} M_0 = EI \{ 2C_1 - C_2 \}$$

$$\frac{1}{\beta^3} Q_0 = EI \{ 3C_1 - C_2 \} - 2EI \{ C_1 - C_2 \} = EI \{ C_1 + C_2 \}$$

En forma matricial

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} w_0 \\ \frac{1}{\beta} \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \underline{G_d} \underline{C}$$

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta^3} Q_0 \\ \frac{1}{\beta^2} M_0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \underline{G_p} \underline{C}$$

Por lo tanto

$$\underline{p} = \underline{G_p} \underline{G_d}^{-1} \underline{d}$$

con

$$\underline{G_p} \underline{G_d}^{-1} = EI \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez es

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} Q_0 \\ M_0 \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 2\beta^3 & \beta^2 \\ \beta^2 & 2\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \underline{k} \underline{d}$$

Notas al ejercicio:

a) Derivada n-sima de la función:

$$w = e^{ax} \{C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\}$$

sea  $y_1 = C_1 e^{ax} \cos bx$

$$y_2 = iC_1 e^{ax} \sin bx$$

$$y = y_1 + y_2 = C_1 e^{(a+bi)x}$$

luego la derivada n-sima es:

$$y^{(n)} = C_1 (a+bi)^n e^{(a+bi)x} = C_1 \rho^n (\cos n\omega + i \sin n\omega) (\cos bx + i \sin bx) e^{ax}$$

luego

$$w^{(n)} = e^{ax} (C_1^{(n)} \cos bx + C_2^{(n)} \sin bx)$$

$$\text{con } C_1^{(n)} = (C_1 \cos n\omega + C_2 \sin n\omega) \rho^n$$

$$C_2^{(n)} = (-C_1 \sin n\omega + C_2 \cos n\omega) \rho^n$$

$$\rho = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega = \arctg \frac{b}{a}$$

b) Derivada n-sima de la función

$$y = C_1 x e^{ax}$$

Se considera  $y = \frac{\partial}{\partial a} \{C_1 e^{ax}\}$ . La derivada n-sima es

$$y^{(n)} = \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left\{ \frac{\partial}{\partial a} (C_1 e^{ax}) \right\} = \frac{\partial}{\partial a} (C_1 a^n e^{ax}) = C_1 \{ (na^{n-1} + a^n x) e^{ax} \}$$

Ejercicio E2.11.

Resolver el ejercicio 2.9 mediante el método de los elementos finitos. Adoptar como funciones de forma funciones del tipo  $(ax+b)e^{-\lambda x}$ .

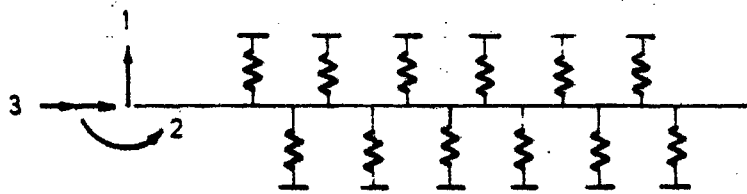


Fig. E2 11a - Viga infinita: Grados de libertad

Energía potencial total en flexión es:

$$V(w) = \frac{1}{2} \int_0^\infty EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^\infty k_w w^2 dx + (w_0, \psi_0) \begin{pmatrix} Q_0 \\ M_0 \end{pmatrix}$$

Por otra parte  $w = (a x + b) e^{-\lambda x}$ , debe satisfacer

$$\begin{aligned} x=0 \quad w &= w_0 & \frac{dw}{dx} &= \psi_0, \text{ es decir} \\ & b = w_0 & a - \lambda b &= \psi_0 \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto } w = \{ (\lambda x + 1) e^{-\lambda x}, x e^{-\lambda x} \} \begin{bmatrix} w_0 \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \underline{N} \underline{d}$$

La relación deformación-desplazamiento es:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{d}$$

$$\text{con } \varepsilon = \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\underline{B} = \frac{d^2 \underline{N}}{dx^2} = \{ \lambda^2 (\lambda x - 1) e^{-\lambda x}, (-2\lambda + \lambda^2 x) e^{-\lambda x} \}$$

La matriz de rigidez es de dimensión (2 x 2) y su expresión es:

$$\underline{k} = \int_0^\infty \underline{B}^T EI \underline{B} dx + \int_0^\infty \underline{N}^T k_w \underline{N} dx = \underline{k}' + \underline{k}''$$

Las integrales se calculan elemento a elemento. Para ello, se realizan los cálculos previos siguientes:

$$\int_0^\infty e^{-2\lambda x} dx = \frac{1}{2\lambda} \quad \text{y por derivación sucesiva, se deduce:}$$

$$\int_0^\infty x e^{-2\lambda x} dx = \frac{1}{4\lambda^2}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-2\lambda x} dx = \frac{1}{4\lambda^3}$$

Entonces:

$$k_{11}^1 = EI \lambda^4 \int_0^\infty (\lambda x - 1)^2 e^{-2\lambda x} dx = EI \lambda^4 \left\{ \frac{\lambda^2}{4\lambda^3} - \frac{2\lambda}{4\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda} \right\} = \frac{1}{4} EI \lambda^3$$

$$k_{21}^I = k_{12}^I = EI \lambda^3 \int_0^\infty (\lambda x - 1)(\lambda x - 2) e^{-2\lambda x} dx = EI \lambda^3 \left\{ \frac{\lambda^2}{4\lambda^3} - \frac{3\lambda}{4\lambda^2} + \frac{2}{2\lambda} \right\} = \frac{EI \lambda^2}{2}$$

$$k_{22}^I = EI \lambda^2 \int_0^\infty (\lambda x - 2)^2 e^{-2\lambda x} dx = EI \lambda^2 \left\{ \frac{\lambda^2}{4\lambda^3} - \frac{4\lambda}{4\lambda^2} + \frac{4}{2\lambda} \right\} = \frac{5EI \lambda}{4}$$

$$k_{11}^{II} = k_w \int_0^\infty (\lambda x + 1)^2 e^{-2\lambda x} dx = k_w \left\{ \frac{\lambda^2}{4\lambda^3} + \frac{2\lambda}{4\lambda^2} + \frac{1}{2\lambda} \right\} = \frac{5k_w}{4\lambda}$$

$$k_{21}^{II} = k_{12}^{II} = k_w \int_0^\infty x(\lambda x + 1) e^{-2\lambda x} dx = k_w \left\{ \frac{\lambda}{4\lambda^3} + \frac{1}{4\lambda^2} \right\} = \frac{k_w}{2\lambda^2}$$

$$k_{22}^{II} = k_w \int_0^\infty x^2 e^{-2\lambda x} dx = k_w \left\{ \frac{1}{4\lambda^3} \right\} = \frac{k_w}{4\lambda^3}$$

Por lo tanto si se denomina  $\beta^4 = \frac{k_w}{EI}$  se tiene:

$$\underline{k} = EI \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\lambda^3 + \frac{5\beta^4}{4\lambda} & \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\beta^4}{2\lambda^2} \\ \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\beta^4}{2\lambda^2} & \frac{5}{4}\lambda + \frac{\beta^4}{4\lambda^3} \end{bmatrix}$$

El valor de  $\lambda$  puede ser arbitrario. Para cada uno de ellos se obtiene una matriz de rígidez más o menos aproximada. Si se adopta  $\lambda$  de modo que  $k$  tenga mínima la traza se obtiene,  $\lambda = \beta$ .

La matriz de rígidez, más adecuada, es entonces:

$$\underline{k} = EI \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\beta^3 & \beta^2 \\ \beta^2 & \frac{3\beta}{2} \end{bmatrix}$$

Si se adopta la misma definición de  $\beta$  que en el ejercicio 2.9., es decir  $\beta = \frac{k_w}{4EI}$ , la matriz de rígidez anterior se convierte en la siguiente:

$$\underline{k} = EI \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}\beta^3 & 2\beta^2 \\ 2\beta^2 & \frac{3\sqrt{2}}{2}\beta \end{bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 4,243\beta^3 & 2\beta^2 \\ 2\beta^2 & 2,121\beta \end{bmatrix}$$

que se acerca a la solución exacta  $\underline{k} = EI \begin{bmatrix} 4\beta^3 & 2\beta^2 \\ 2\beta^2 & 2\beta \end{bmatrix}$

Ejercicio E2.12.

Determinar las reacciones de empotramiento rígido para una carga horizontal uniformemente repartida de valor  $p$ , del elemento representado en la figura E2.12a. suponiendo forma parte de una celosía.

Se utilizará:

- a) Método general energético. Teorema segundo de Castigliano.
- b) Ecuación diferencial.
- c) Elementos finitos.

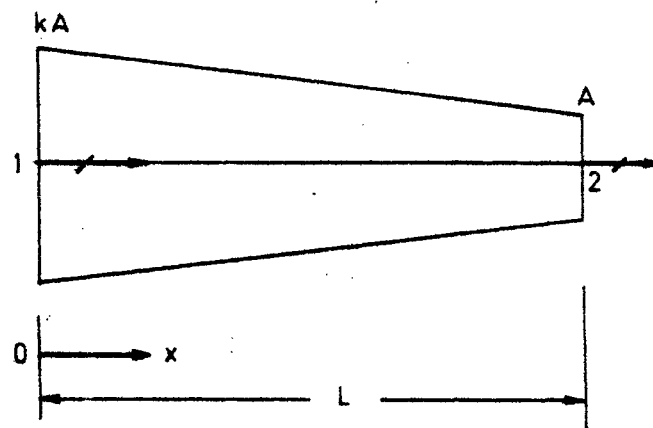


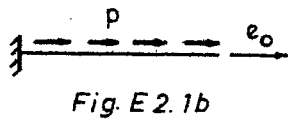
Fig. E2.12a

a) Método general.

La matriz de rigidez exacta, calculada en el ejercicio 2.1 es:

$$k = \frac{EA(k-1)}{L \ln k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

El desplazamiento en la estructura básica se determina según el teorema de Castigliano. (Figura E2.12b.).



$$e_0 = \int_0^L \frac{N_0 N_1}{EA} dx$$

con  $N_0 = p(L-x)$

$N_1 = 1$

$A = A(k + \frac{1-k}{L} x)$  y si  $\xi = \frac{x}{L}$ , se puede poner:

$$e_0 = \frac{pL}{EA} \int_0^L \frac{(1-\xi) d\xi}{k + (1-k)\xi} = \frac{pL^2}{EA(k-1)} \left\{ 1 - \frac{1}{k-1} \ln k \right\}$$

Las reacciones de empotramiento rígido son:

$$\begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -L_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -pL \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -pL - k_{12}e_0 \\ -k_{22}e_0 \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\hat{p}_1 = -pL + \frac{EA(k-1)}{L \ln k} \frac{pL^2}{EA(k-1)} \left\{ 1 - \frac{1}{k-1} \ln k \right\} = pL \left\{ \frac{1}{\ln k} - \frac{k}{k-1} \right\}$$

$$\hat{p}_2 = -\frac{EA(k-1)}{L \ln k} \frac{pL^2}{EA(k-1)} \left\{ 1 - \frac{1}{k-1} \ln k \right\} = pL \left\{ -\frac{1}{\ln k} + \frac{1}{k-1} \right\}$$

Se comprueba que  $\hat{p}_1 + \hat{p}_2 = pL$ .

b) La ecuación diferencial es:

$$\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = p \quad \text{en} \quad x \in (0, 1)$$

$$n=0 \quad \text{para} \quad x=0 \quad \text{y} \quad x=L.$$

La solución de la ecuación, es directa:

$$EA \frac{du}{dx} = px + C_1 \quad p \cdot L. \quad \{2.12a\}$$

$$du = \frac{px + C_1 p}{EA \left( k + \frac{1-k}{L} x \right)} dx = \frac{pL^2}{EA} \left\{ \frac{1}{1-k} + \frac{C_1 - \frac{k}{1-k}}{k + (1-k)\xi} \right\} d\xi$$

es decir

$$n = \frac{pL^2}{EA} \frac{\xi}{1-k} + (C_1 - \frac{k}{1-k}) \frac{1}{1-k} \ln \{ k + (1-k)\xi \} + C_2 \frac{pL^2}{EA}$$

Las condiciones de contorno conducen a:

$$0 = (C_1 - \frac{k}{1-k}) \frac{\ln k}{1-k} + C_2$$

$$0 = \frac{1}{k-1} + C_2;$$

$$\text{La solución es } C_2 = \frac{1}{k-1} \text{ y } C_1 = \frac{1}{\ln k} - \frac{k}{k-1}$$

La ecuación {2.12a.} permite calcular las reacciones de empotramiento:

$$\hat{p}_1 = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=0} = pL \left\{ \frac{1}{\ln k} - \frac{k}{k-1} \right\}$$

$$\hat{p}_2 = EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = pL \left\{ \frac{-1}{\ln k} + \frac{1}{k-1} \right\}$$



c) Método de los elementos finitos.

Según el ejercicio 2.1., se tienen las funciones de forma:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{x}{L}$$

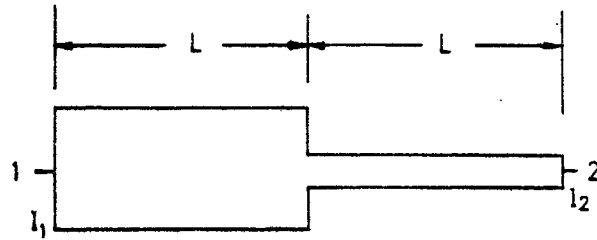
y las reacciones de empotramiento son, simplemente:

$$\hat{p}_1 = - \int_0^L N_1^T p \, dx = -pL \int_0^1 (1-\xi) d\xi = -p \frac{L}{2}$$

$$\hat{p}_2 = - \int_0^L N_2^T p \, dx = -pL \int_0^1 \xi d\xi = -p \frac{L}{2} .$$

Que son independientes de la variación de la sección.

Ejercicio E2.13.



$$\frac{I_2}{I_1} = \lambda$$

Fig. E2.13 a

Hallar las reacciones de empotramiento rígido, en la viga de la figura E2.13a. para los casos de carga de la figura E2.13b.

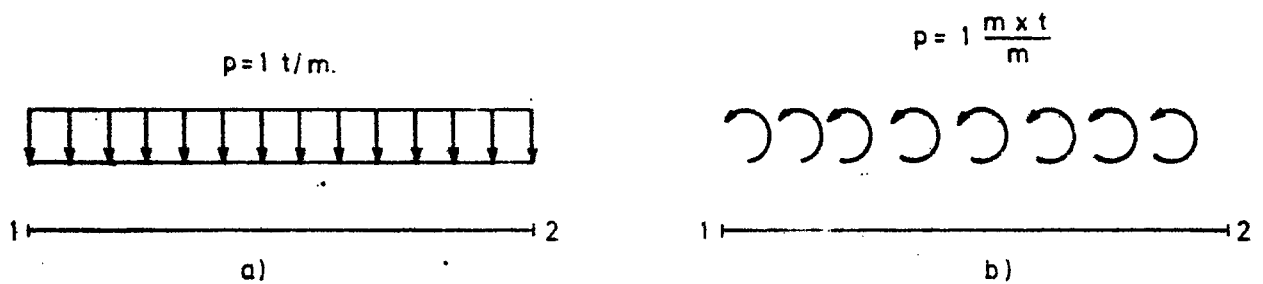


Fig. E2.13 b

- Se utilizarán los procedimientos siguientes:
- a) Condensación estática.
  - b) Método de los elementos finitos.

a) CONDENSACION ESTATICA.

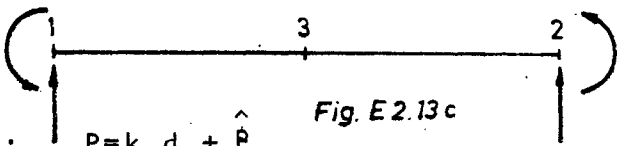
$$\begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_2 \\ \underline{P}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_2 \\ \underline{d}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{P}_1 \\ \hat{P}_2 \\ \hat{P}_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{P} = \underline{k} \underline{d} + \hat{\underline{P}}$$


Fig. E2.13c

$$\underline{P}_3 = k_{31}\underline{d}_1 + k_{32}\underline{d}_2 + k_{33}\underline{d}_3 + \hat{P}_3; \quad \underline{d}_3 = -k_{33}^{-1}k_{31}\underline{d}_1 - k_{33}^{-1}k_{32}\underline{d}_2 - k_{33}^{-1}\hat{P}_3$$

$$\underline{P}_1 = (k_{11} - k_{13}k_{33}^{-1}k_{31})\underline{d}_1 + (k_{12} - k_{13}k_{33}^{-1}k_{32})\underline{d}_2 - k_{13}k_{33}^{-1}\hat{P}_3 + \hat{P}_1$$

$$\underline{P}_2 = (k_{21} - k_{23}k_{33}^{-1}k_{31})\underline{d}_1 + (k_{22} - k_{23}k_{33}^{-1}k_{32})\underline{d}_2 - k_{23}k_{33}^{-1}\hat{P}_3 + \hat{P}_2$$

Pero se cumple que  $\underline{d}_1 = \underline{d}_2 = 0$

Luego:

$$\left. \begin{aligned} \hat{P}_1^* &= \hat{P}_1 - k_{13} \cdot k_{33}^{-1} \hat{P}_3 \\ \hat{P}_2^* &= \hat{P}_2 - k_{23} \cdot k_{33}^{-1} \hat{P}_3 \end{aligned} \right\}$$

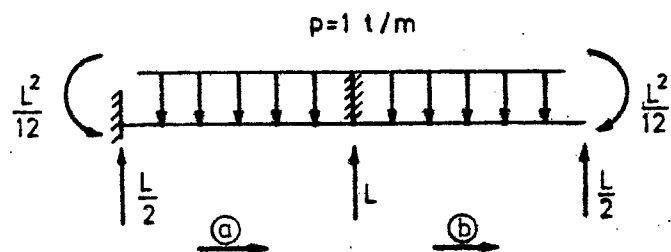


Fig. E2.13d

Teniendo en cuenta el apartado c) del ejercicio 2.4., resulta (Figura E2.13d).

$$k_{13} = (k_{12})_a; \quad k_{23} = (k_{21})_b; \quad k_{33} = (k_{22})_a + (k_{11})_b$$

$$k_{33} = \frac{2EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} 2L^2 & -3L \\ -3L & 6 \end{bmatrix} + \frac{2EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} 2\lambda L^2 & +3\lambda L \\ 3\lambda L & 6\lambda \end{bmatrix} =$$

$$\frac{2EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} 2L^2(1+\lambda) & 3L(\lambda+1) \\ 3L(\lambda-1) & 6(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 12L^2(\lambda+1)^2 - 9L^2(\lambda-1)^2 = 3L^2\{4\lambda^2 + 8\lambda + 4 - 3\lambda^2 + 6\lambda - 3\} = 3L^2\{\lambda^2 + 14\lambda + 1\}$$

$$K_{33}^{-1} = \frac{L^3}{2EI_1} \times \frac{1}{3L^2(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} 6(\lambda+1) & -3L(\lambda-1) \\ -3L(\lambda-1) & 2L^2(\lambda+1) \end{bmatrix} =$$

$$\frac{L}{6EI_1(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} 6(\lambda+1) & -3L(\lambda-1) \\ -3L(\lambda-1) & 2L^2(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$K_{13} \cdot K_{33}^{-1} = \frac{2EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} L^2 & -3L \\ 3L & -6 \end{bmatrix} \times \frac{L}{6EI_1(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} 6(\lambda+1) & -3L(\lambda-1) \\ -3L(\lambda-1) & 2L^2(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3L^2(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} 6L^2(5\lambda-1) & -3L^2(3\lambda+1) \\ 36L\lambda & -3L^2(7\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$K_{23} \cdot K_{33}^{-1} = \frac{2EI_1}{L^3} \begin{bmatrix} L^2 & 3L \\ -3L & -6 \end{bmatrix} \times \frac{L}{6EI_1(\lambda^2 + 14\lambda + 1)} \begin{bmatrix} 6(\lambda+1) & -3L(\lambda-1) \\ -3L(\lambda-1) & 2L^2(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\lambda}{3L^2(\lambda^2 + 6\lambda - 7)} \begin{bmatrix} 3L^2(5-\lambda) & 3L^3(\lambda+3) \\ -36L & -3L^2(\lambda+7) \end{bmatrix}$$

1<sup>er</sup> Caso: Carga unidad.

$$\hat{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix}; \quad \hat{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{12} \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix}; \quad \hat{p}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{L^2}{12} \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3L^2(\lambda^2+14\lambda+1)} \begin{bmatrix} 6L^2(5\lambda-1) & -3L^3(3\lambda+1) \\ 26L\lambda & -3L^2(7\lambda+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{3L^2(\lambda^2+14\lambda+1)} \begin{bmatrix} -3L^4(3\lambda+1) \\ -3L^3(7\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\lambda}{3L^2(\lambda^2+14\lambda+1)} \begin{bmatrix} 3L^2(5-\lambda) & 3L^3(\lambda+3) \\ -36L & -3L^2(\lambda+7) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\lambda}{3L^2(\lambda^2+14\lambda+1)} \begin{bmatrix} 3L^4(\lambda+3) \\ -3L^3(\lambda+7) \end{bmatrix}$$

$$\hat{p}_1^* = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{12} \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{\lambda^2+14\lambda+1} \begin{bmatrix} -L^2(3\lambda+1) \\ -L(7\lambda+1) \end{bmatrix}; \quad \hat{p}_1^* = \begin{bmatrix} \frac{L^2}{12} \times \frac{\lambda^2+50\lambda+13}{\lambda^2+14\lambda+1} \\ \frac{L}{2} \times \frac{\lambda^2+28\lambda+3}{\lambda^2+14\lambda+1} \end{bmatrix}$$

$$p_2^* = \begin{bmatrix} -\frac{L^2}{12} \\ \frac{L}{2} \end{bmatrix} - \frac{\lambda}{\lambda^2+14\lambda+1} \begin{bmatrix} L^2(\lambda+3) \\ -L(\lambda+7) \end{bmatrix}; \quad p_2^* = \begin{bmatrix} -\frac{L^2}{12} \times \frac{13\lambda^2+50\lambda+1}{\lambda^2+14\lambda+1} \\ \frac{L}{2} \times \frac{3\lambda^2+28\lambda+1}{\lambda^2+14\lambda+1} \end{bmatrix}$$

Comprobación:

Equilibrio fuerzas verticales:

$$\frac{L}{2} \times \frac{4\lambda^2 + 56\lambda + 4}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} = \frac{4L}{2} \times \frac{\lambda^2 + 14\lambda + 1}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} = 2L$$

Equilibrio de momentos:

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{12} \times \frac{13\lambda^2 + 50\lambda + 1}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} + 2L^2 - L^2 &= \frac{3\lambda^2 + 28\lambda + 1}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} \\ \frac{L^2}{12} \times \frac{13\lambda^2 + 50\lambda + 1 + 24\lambda^2 + 336\lambda + 24 - 36\lambda^2 - 336\lambda - 12}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} &= \frac{L^2}{12} \times \frac{\lambda^2 + 50\lambda + 13}{\lambda^2 + 14\lambda + 1} \end{aligned}$$

2º CASO: MOMENTO UNIDAD.

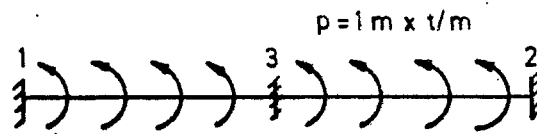


Fig. E2.13 e

Para obtener las reacciones de empotramiento rígido debidas a un momento unidad uniformemente repartido se derivan las de la carga vertical unidad situada en un punto genérico y se integra el resultado a lo largo de toda la viga.

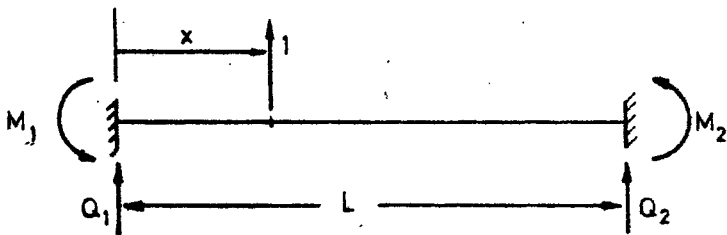


Fig. E2.13 f

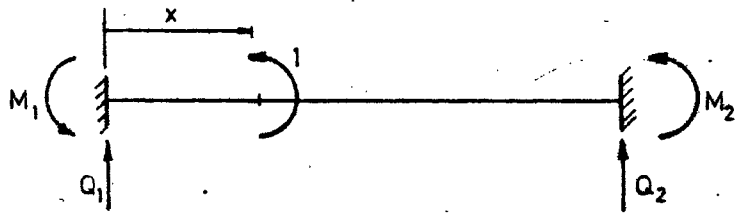


Fig. E2.13 g

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= -x \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\ Q_1 &= -\left\{1 - \frac{x}{L}\right\}^2 \left(3 - 2\frac{x}{L}\right) \\ M_2 &= \frac{x^2}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ Q_2 &= -\frac{x}{L^2} \left(3 - 2\frac{x}{L}\right) \end{aligned} \right\}$$

Derivando cada  
→reacción respecto  
de x, resulta:

$$\left\{ \begin{aligned} M_1 &= -\left\{1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}\right\} \\ Q_1 &= \frac{6x}{L^2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \\ M_2 &= \frac{x}{L} \left(2 - \frac{3x}{L}\right) \\ Q_2 &= -\frac{6x}{L^2} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \end{aligned} \right. \quad \{E2.13a.\}$$

Integrando los resultados a lo largo de toda la luz L, se deduce (figura E2.13h.);

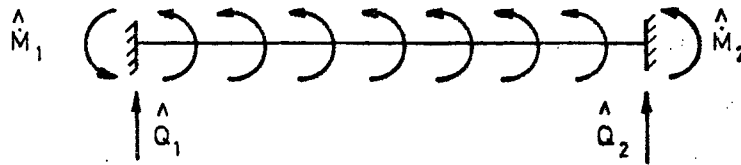


Fig. E2.13h

$$\hat{M}_1 = -\int_0^L \left(1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}\right) dx = -\left\{L - \frac{2}{L} L^2 + \frac{3}{3} \frac{L^3}{L^2}\right\} = 0$$

$$\hat{Q}_1 = \int_0^L \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3}\right) dx = \frac{6}{L^2} \left\{\frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{3L}\right\} = \frac{6}{6L^2} \{3L^2 - 2L^2\} = 1$$

$$\hat{Q}_2 = -\int_0^L \left(\frac{6x}{L^2} - \frac{6x^2}{L^3}\right) dx = -1$$

$$\hat{M}_2 = \int_0^L \left(\frac{2x}{L} - \frac{3x^2}{L^2}\right) dx = \frac{2L}{2} - \frac{3L^3}{3L^2} = L - L = 0$$

Queda por lo tanto lo indicado en la figura E2.13i.



Fig. E2.13i

Se observa que

$$\hat{p}_3 = 0$$

$$\text{Luego } \hat{p}_1^* \equiv \hat{p}_1$$

$$\hat{p}_2^* \equiv \hat{p}_2$$

$\hat{p}_1^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\hat{p}_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
--	---



b) METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.

Teniendo en cuenta las funciones de forma definidas en el ejercicio 2.4. (apartado d), resultan las siguientes fuerzas consistentes en los nudos:

$$\hat{p} = \begin{bmatrix} -\hat{M}_1 \\ -\hat{Q}_1 \\ -\hat{M}_2 \\ -\hat{Q}_2 \end{bmatrix} = \int_0^L \underline{\phi}^T \underline{b} \, dx$$

Caso de  $p=1$

$$\hat{p} = 2L \int_0^L \underline{\phi}^T (-1) d\xi = -2L \begin{bmatrix} \int_0^1 \xi(1-\xi)^2 \cdot 2L \, d\xi \\ \int_0^1 (1-3\xi^2+2\xi^3) d\xi \\ -\int_0^1 \xi^2(1-\xi) \cdot 2L \, d\xi \\ \int_0^1 (3\xi^2-2\xi^3) d\xi \end{bmatrix} = -2L \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{L}{6} \\ -\frac{L}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{L^2}{3} \\ -L \\ \frac{L^2}{3} \\ -L \end{bmatrix}$$

Caso de  $m=1$

$$\hat{p} = 2L \int_0^1 \underline{\phi}^T \cdot 1 \cdot d\xi = 2L \begin{bmatrix} \int_0^1 (1-4\xi+3\xi^2) 2L \, d\xi \\ \int_0^1 (-6\xi+6\xi^2) d\xi \\ \int_0^1 (2\xi-3\xi^2) \cdot 2L \, d\xi \\ \int_0^1 (6\xi-6\xi^2) d\xi \end{bmatrix} = 2L \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2L \\ 0 \\ 2L \end{bmatrix}$$

Ejercicio E2.14.

Determinar las cargas equivalentes (solución inicial) de la barra cónica de la figura E2.14a, sometida la torsión pura.

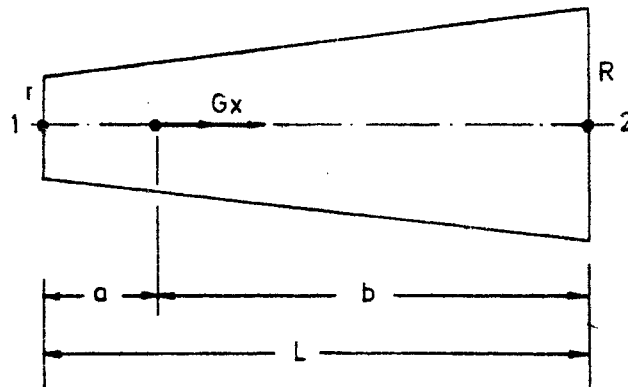


Fig. E2 14 a

La ecuación diferencial es:

$$\frac{d}{dx}\{K_T \frac{d\theta}{dx}\} = G_x \cdot \delta(x-a) \quad \text{con } K_T = GJ \text{ módulo de torsión}$$

y las condiciones de borde  $\theta=0$  para  $x=0$  y  $x=1$ .

El problema constituye un ejemplo de determinación de la función de Cremona (o línea de influencia). Se utiliza un procedimiento típico de cálculo.

$$K_T = \frac{G\pi}{2} \left\{ r + \frac{R-r}{L} x \right\}^4 = \frac{G\pi r^4}{2} \{ (\lambda-1)\xi \}^4 \quad \text{con} \quad \xi = \frac{x}{L} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{R}{r}$$

Integrando la ecuación diferencial resulta:

$$K_T \frac{d\theta}{dx} = C_1, \quad \theta = \int \frac{C_1}{K_T} dx + C_2 + \frac{2C_1 L}{G\pi r^4} \int \frac{d\xi}{\{1 + (\lambda-1)\xi\}^4} + C_2$$

Por lo tanto

$$\theta = - \frac{2C_1 L}{3G\pi r^4} \frac{1}{(\lambda-1)} \frac{1}{\{1 + (\lambda-1)\xi\}^3} + C_2$$

$$\text{Para } \xi=0 \quad \theta = - \frac{2C_1 L}{6G\pi r^4} \frac{1}{\lambda-1} + C_2 = 0$$

luego

$$\theta = \frac{2C_1 L}{3G\pi r^4 (\lambda-1)} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\{1 + (\lambda-1)\xi\}^3} \right\} \quad \text{para} \quad 0 \leq \xi \leq \frac{a}{L} = \bar{a}$$

Análogamente adoptando los ejes de la figura E2.14b., se tiene:

$$\theta = \frac{2C_1 L}{3G\pi R^4 \left(\frac{1}{\lambda}-1\right)} \left\{ 1 - \frac{1}{\{1 + (\frac{1}{\lambda}-1)\xi'\}^3} \right\} \quad \text{para} \quad 0 \leq \xi' \leq \frac{b}{L} = \bar{b} ; \quad \xi' = \frac{x'}{L}$$

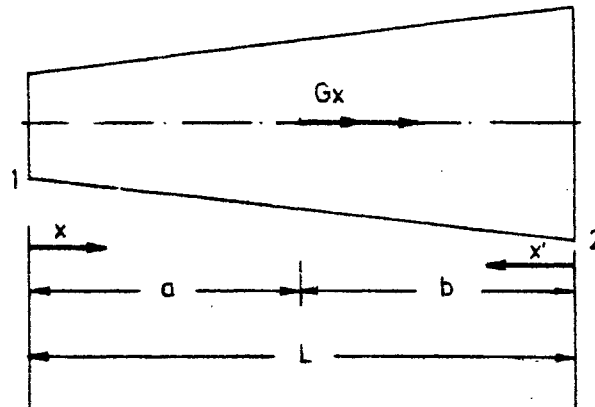


Fig. E2.14 b

En el punto  $x=a$ , se cumple el equilibrio:

$$K_T \frac{d\theta}{dx} \Big|_a + K_T \frac{d\theta}{dx} \Big|_b = -G_x$$

$$\text{es decir } C_1' + C_1 = -G_x \quad \{E2.14a.\}$$

Además se debe satisfacer la compatibilidad o bien  $\theta_a = \theta_b$ .

$$\frac{C_1}{r^4(\lambda-1)} \left[ 1 - \frac{1}{\{1+(\lambda-1)\frac{a}{b}\}^3} \right] = \frac{C_1'}{r^4\lambda^3(1-\lambda)} \left\{ 1 - \frac{1}{\{1+\frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{a}{b}\}^3} \right\}, \{E2.14b.\}$$

La solución de las ecuaciones {E2.14a.} y {E2.14b.} es:

$$C_1' = -\left\{ 1 - \frac{1}{(\frac{a}{b}\lambda + \frac{a}{b})^3} \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right\}^{-1} G_x$$

$$C_1 = \left\{ 1 - \frac{\lambda^3}{(\frac{a}{b}\lambda + \frac{a}{b})^3} \right\} \{\lambda^3 - 1\}^{-1} G_x$$

Los momentos de empotramiento rígido (solución inicial) son:

$$M_{T1} = \left\{ 1 - \frac{\lambda^3}{(\bar{a}\lambda + \bar{b})^3} \right\} \{\lambda^3 - 1\}^{-1} G_x$$

$$M_{T2} = \left\{ 1 - \frac{1}{(\bar{a}\lambda + \bar{b})^3} \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right\} G_x$$

Si  $\lambda \rightarrow 1$ , resultan expresiones indeterminadas. Sin embargo, desarrollando en serie de  $\lambda - 1$  o bien por L'Hôpital se obtiene:

$$M_{T1} = \bar{b} G_x \quad \text{y} \quad M_{T2} = \bar{a} G_T.$$

Ejercicio E2.15.

Determinar la matriz de rigidez de la barra curva de la figura E2.15a. cuya directriz es parabólica de segundo grado, suponiendo que forma parte de una estructura celosía plana.

No se considera deformación por cortante.  $A$  es el área total de la sección e  $I$  su inercia a flexión. Se supone que se cumple en cualquier sección de la barra:  $\frac{A}{\cos\alpha} = A_0$ ,  
 $I \cos\alpha = I_0$  con  $A_0$  e  $I_0$  constantes.

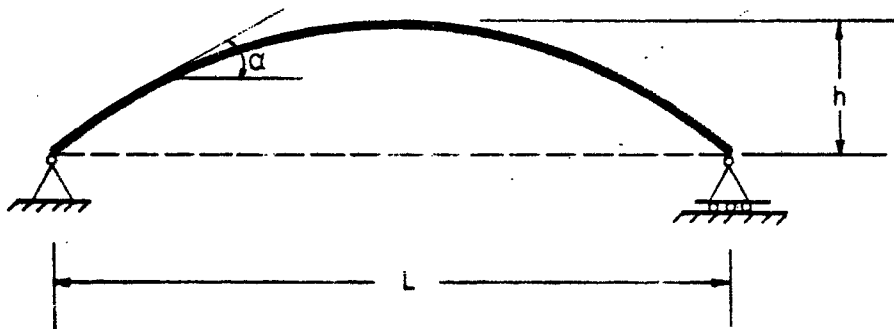


Fig. E2 15 a

La ecuación de la directriz es  $y=4h\frac{x}{L}(1-\frac{x}{L})$ .

Se utilizará la técnica de la matriz de flexibilidad para obtener la rigidez de la barra. La fuerza actuante en la barra isostática es  $S$  y su deformación eficaz  $e$ .

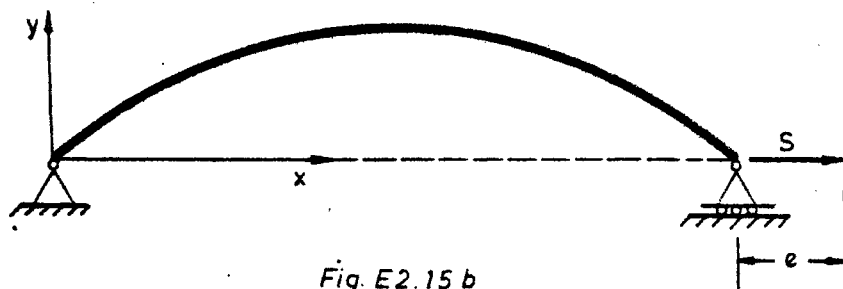


Fig. E2.15 b

La energía de deformación de la barra sustentada como se indica en la figura E2.15b., es:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2 d\xi}{EI} + \frac{1}{2} \int_0^L N^2 \frac{d\xi}{EA} = \frac{1}{2} \int_0^L (S y) \frac{d\xi}{EI} + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(S \cos \alpha)^2}{EA} d\xi$$

Con  $L$  la longitud del arco.

Por el segundo teorema de Castigliano, se puede escribir

$$e = \frac{\partial U}{\partial H} = S \left\{ \int_0^L y^2 \frac{dS}{EI} + \int_0^L \frac{\cos^2 \alpha}{EA} d\xi \right\}$$

con  $dx = d\xi \cos \alpha$ , la ecuación anterior se transforma en la siguiente:

$$e = S \left\{ \frac{1}{EI} \int_0^L y^2 dx + \frac{1}{EA_0} \int_0^L dx \right\}$$

es decir;

$$e = L \left\{ \frac{8h^2}{15EI_0} + \frac{1}{EA_0} \right\} S = F.S$$

La matriz de equilibrio es  $H=(1)$ , con lo que la ma  
triz de rígidez resulta:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} HkH^T & -Hk \\ -kH^T & k \end{bmatrix} \quad \text{con } k=F^{-1}$$

Por lo tanto:

$$\underline{K} = \frac{E}{L \left\{ \frac{8h^2}{15I_0} + \frac{1}{A_0} \right\}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Ejercicio E2.16.

Determinar la matriz de rigidez del elemento barra (Figura E2.16a.), sometida a torsión no uniforme, considerando la coacción de alabeo.

$GJ$  módulo de torsión de St. Venant.

$EI_\omega$  módulo de torsión por alabeo.

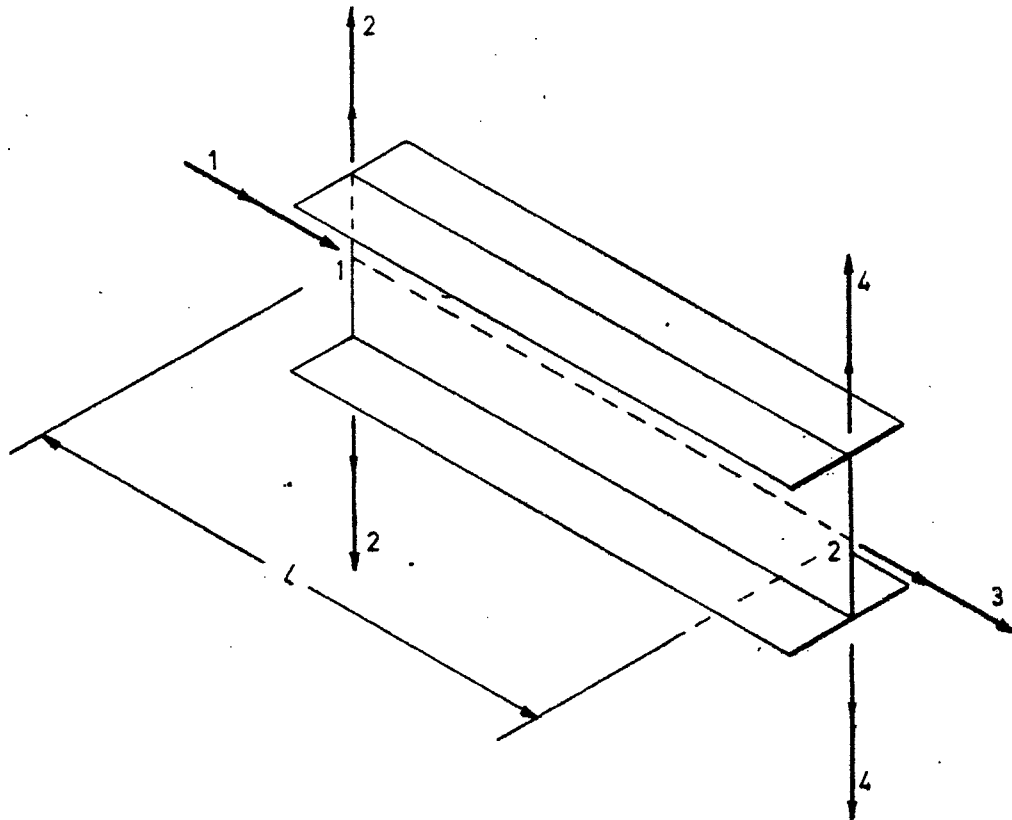


Fig. E2.16a - Grados de libertad de la barra a torsión no uniforme

Grados de libertad de la barra a torsión no uniforme.

Se sabe que  $M_x = GJ \phi' - EI_{\omega} \phi'''' = M_x^{ST} + M_x^{\omega}$

con  $M_x$  momento torsional total

$M_x^{ST}$  momento torsional de St. Venant =  $GJ\phi'$

$M_x^{\omega}$  momento torsional de alabeo =  $-EI_{\omega} \phi''''$

La ecuación diferencial general (sección constante) es:

$$GJ\phi'' - EI_{\omega} \phi'''' = m_x$$

La matriz de rigidez se obtiene, de la ecuación homogénea. La solución general (complementaria) de la ecuación:

$$GJ\phi'' - EI_{\omega} \phi'''' = 0$$

es:

$$\phi = A_1 \operatorname{Sh} px + A_2 \operatorname{Ch} px + A_3 px + A_4 \quad \text{con} \quad p = \sqrt{\frac{GJ}{EI_{\omega}}}$$

Las ecuaciones de borde son:

cinemáticas  $\phi, \theta = \phi$

estáticas  $+GJ\phi' = M_x^{ST}, -EI_{\omega} \phi'''' = M_x^{\omega}$

En los extremos  $x=0$  y  $x=L$ .

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \theta_1 \\ \phi_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ p & 0 & p & 0 \\ s & c & pL & 1 \\ pc & ps & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \underline{G_d} \underline{A}$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} M_{x1} \\ M_{w1} \\ M_{x2} \\ M_{w2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -GJ & 0 & 0 & 0 \\ p^2 EI_{\omega} & 0 & 0 & 0 \\ cGJ & sGJ & 0 & 0 \\ -p^2 c EI_{\omega} & -p^2 s EI_{\omega} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = \underline{G_p} \underline{A}$$

siendo  $s = \text{sen } \phi$  y  $c = \text{cos } \phi$ .

Por lo tanto  $\underline{p} = \underline{k} \underline{d}$  con

$$\underline{k} = \underline{G}_p \underline{G}_d^{-1}$$

El resultado final es

$$\underline{k} = \begin{bmatrix} \underline{k}_{11} & \underline{k}_{12} \\ \underline{k}_{21} & \underline{k}_{22} \end{bmatrix}$$

siendo

$$\underline{k}_{11} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -ps & -(c-1) \\ -(c-1) & \frac{1}{p}(s-pLc) \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_{12} = \underline{k}_{21}^T = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} ps & -(c-1) \\ c-1 & \frac{1}{p}(p-s) \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}_{22} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -ps & c-1 \\ c-1 & \frac{1}{p}(s-pLc) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \frac{GJ}{2(c-1) - pLs}$$

$$\underline{K} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} -ps & -(c-1) & ps & -(c-1) \\ -(c-1) & \frac{1}{p}(s-pLc) & c-1 & \frac{1}{p}(p-s) \\ ps & c-1 & -ps & c-1 \\ -(c-1) & \frac{1}{p}(p-s) & c-1 & \frac{1}{p}(s-pLc) \end{bmatrix}$$

Ejercicio E2.17.

Determinar las funciones de forma del elemento monodimensional  $C^1$  (viga recta a flexión) considerando:

- a) dos nudos (figura E2.17a.).
- b) tres nudos (figura E2.17b.).

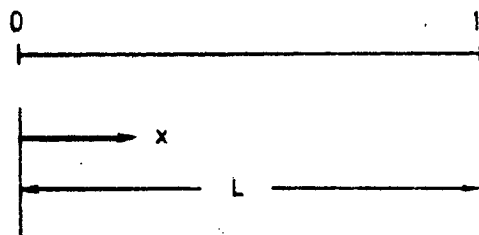


Fig. E2.17 a

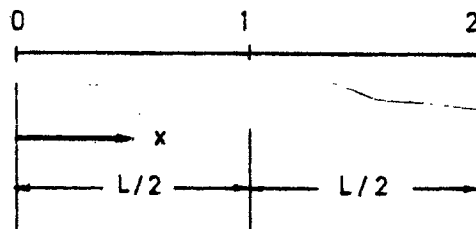


Fig. E2.17 b

a) Los grados de libertad en cada nudo son en términos de desplazamientos: la flecha o función ( $w$ ) y la derivada de dicha función o giro ( $\frac{dw}{dx}$ ) particularizadas en el nudo.

Se tiene:

$$w(x) = (N_1, N_2, N_3, N_4) \begin{bmatrix} w_0 \\ \theta_0 \\ w_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}$$

siendo

$$w_i = w(x) \big|_{x=x_i} \quad y \quad \theta_i = \frac{dw}{dx}(x) \big|_{x=x_i} \quad (i=0,1)$$

con  $x_0=0$

y

$x_1=L$ .

Se comprende que  $N_1=N_1(x)$  tiene que cumplir las condiciones:

$$N_1(x_1)=1 \quad N_2(x_1)=0 \quad N_3(x_1)=0 \quad N_4(x_1)=0$$

$$\frac{dN_1}{dx} \big|_{x=x_0}=0 \quad \frac{dN_2}{dx} \big|_{x=x_0}=1 \quad \frac{dN_3}{dx} \big|_{x=x_0}=0 \quad \frac{dN_4}{dx} \big|_{x=x_0}=0$$

$$N_1(x_2)=0 \quad N_2(x_2)=0 \quad N_3(x_2)=1 \quad N_4(x_2)=0$$

$$\frac{dN_1}{dx} \big|_{x=x_1}=0 \quad \frac{dN_2}{dx} \big|_{x=x_1}=0 \quad \frac{dN_3}{dx} \big|_{x=x_1}=0 \quad \frac{dN_4}{dx} \big|_{x=x_1}=1$$

que permiten determinar las funciones de forma  $N_i(x)$  suponiendo que son funciones polinómicas cúbicas, es decir

$$N_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i \quad (i=1,2,3,4)$$

Resulta:

$$N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$N_2 = L(1 - 2\xi + \xi^2)\xi$$

$$N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$N_4 = L(\xi - 1)\xi$$

$$\text{con } \xi = \frac{x}{L}$$

Estas funciones de forma constituyen las funciones viga o polinomios hermíticos. Estos polinomios se definen del

siguiente modo: (para  $m=1,2,3,\dots,n$ ):

$$H_{mi}^{(n)}(x)$$

es un polinomio de orden  $2n-1$ , que toma el valor

$$\frac{d^k H}{dx^k} = 1 \quad \text{para} \quad k=m \quad \text{y} \quad x=x_i$$

$$\frac{d^k H}{dx^k} = 0 \quad \text{para} \quad k \neq m \quad \text{y cualquier } x=x_j \quad (j \neq i)$$

$$\text{o para} \quad k=n \quad \text{y} \quad x=x_i$$

Se puede comprobar que

$$N_1 = H_{00}^{(1)}(x)$$

$$N_2 = H_{10}^{(1)}(x)$$

$$N_3 = H_{01}^{(1)}(x)$$

$$N_4 = H_{11}^{(1)}(x)$$

b) De un modo análogo se define:

$$w(x) = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6)$$

$$\begin{bmatrix} w_0 \\ \theta_0 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{con } x_0=0 \quad x_1=\frac{L}{2} \quad \text{y} \quad x_2=L.$$

Se puede demostrar que las funciones de forma sa tisfacen a las condiciones siguientes:

$$N_{2i+1}(x_i) = 1 \quad N_{2i+1}(x_j) = 0 \quad \frac{dN_{2i+1}}{dx} \Big|_{x=x_i \text{ o } x_j} = 0$$

$$N_{2i}(x_i) = 0 \quad (\text{con } x=x_i \text{ ó } x_j)$$

$$\left. \frac{dN_{2i}}{dx} \right|_{x=x_j} = 0 \quad \left. \frac{dN_{2i}}{dx} \right|_{x=x_i} = 0 \quad (i, j=0, 1, 2 ; j \neq i)$$

Si se consideran polinomios quínticos, se obtiene:

$$N_1 = (1+6\xi)(4\xi^4 - 12\xi^3 + 13\xi^2 - 6\xi + 1) = -24\xi^5 - 68\xi^4 + 66\xi^3 - 23\xi^2 + 1$$

$$N_3 = 16\xi^4 - 32\xi^3 + 16\xi^2$$

$$N_5 = -24\xi^5 + 52\xi^4 - 34\xi^3 + 7\xi^2$$

$$N_2 = L\xi(4\xi^4 - 12\xi^3 + 13\xi^2 - 6\xi + 1)$$

$$N_4 = L\xi(16\xi^4 - 40\xi^3 + 32\xi^2 - 8\xi)$$

$$N_6 = L\xi(4\xi^4 - 8\xi^3 + 5\xi^2 - \xi) \quad \text{siendo} \quad \xi = \frac{x}{L}$$

Se comprueba que con la definición de polinomios hermíticos anteriores se puede escribir:

$$N_1 = H_{00}^{(2)}(x), \quad N_2 = H_{10}^{(2)}(x)$$

$$N_3 = H_{01}^{(2)}(x), \quad N_4 = H_{11}^{(2)}(x)$$

$$N_4 = H_{02}^{(2)}(x), \quad N_5 = H_{12}^{(2)}(x)$$

Se puede demostrar la siguiente relación existente entre los polinomios de interpolación de Lagrange y los hermíticos:

$$H_{0i}^{(n)} = \left\{ 1 - 2 \frac{d}{dx} \{ p_i^n(x) \} \right|_{x=x_i} (x - x_i) \right\} \{ p_i^n(x) \}^2$$

$$H_{1i}^{(n)} = (x - x_i) \{ p_i^n(x) \}^2$$

Observación:

Es más conveniente utilizar en el análisis mediante el método de los elementos finitos sistemas de coordenadas con

origen en el punto medio del elemento y normalizado a longitud 2, es decir, en el caso de dos nudos  $\xi_1 = -1$  y  $\xi_2 = 1$ . En el caso de tres nudos  $\xi_1 = -1$ ,  $\xi_2 = 0$  y  $\xi_3 = 1$ . De esta forma se puede proceder a la integración numérica de la matriz de rigidez) las funciones de forma son más simples. Se obtiene entonces:

Caso a):

$$N_1 = (2\xi - 1)^2 (\xi + 1)$$

$$N_2 = (\xi - 1)(\xi + 1)L$$

$$N_3 = (2\xi + 1)(1 - \xi)$$

$$N_4 = (\xi + 1)(\xi - 1)L$$

Caso b):

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2 \xi^2 (4 + 3\xi)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi)^2 \xi^2 (1 + \xi)$$

$$N_3 = (1 - \xi^2)^2$$

$$N_4 = (1 - \xi^2)\xi$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1 + \xi)^2 \xi^2 (4 - 3\xi)$$

$$N_6 = -\frac{1}{4}(1 + \xi)\xi^2 (1 - \xi)$$



Ejercicio E3.1.

Formar la matriz de rigidez de la estructura indicada en la figura expresando por  $k_{ij}^a$  un termino correspondiente al elemento a. Se supone un sólo grado de libertad por nudo.

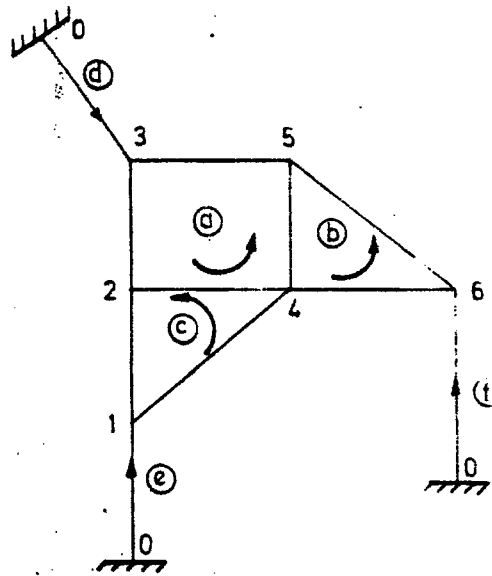


Fig. 3.1a

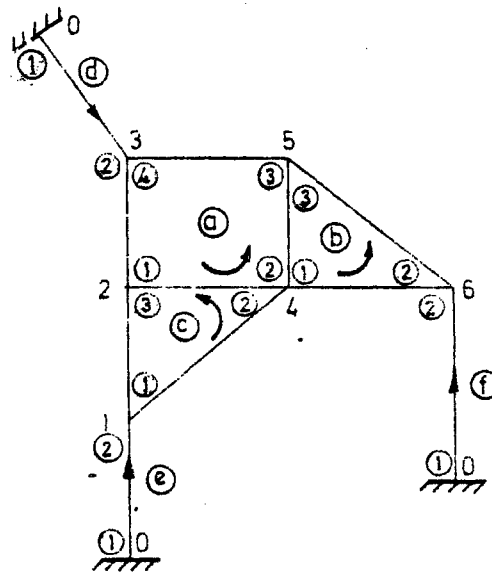


Fig. 3.1b

Teniendo en cuenta la figura E3.1b. se tiene

	1	2	3	4	5	6
1	$K_{11}^c + K_{22}^e$	$K_{13}^c$	-	$K_{12}^c$	-	-
2	$K_{31}^c$	$K_{11}^a + K_{33}^c$	$K_{14}^a$	$K_{12}^a + K_{32}^c$	$K_{13}^a$	-
3	-	$K_{41}^a$	$K_{44}^a + K_{22}^d$	$K_{42}^a$	$K_{43}^a$	-
4	$K_{21}^c$	$K_{21}^a + K_{23}^c$	$K_{24}^a$	$K_{22}^a + K_{11}^b$ $K_{22}^b$	$K_{23}^a + K_{13}^b$	$K_{12}^b$
5	-	$K_{31}^a$	$K_{34}^a$	$K_{32}^a + K_{31}^b$	$K_{33}^a + K_{33}^b$	$K_{32}^b$
6	-	-	-	$K_{21}^b$	$K_{23}^b$	$K_{22}^b + K_{22}^f$

Ejercicio E3.2.

Todas las barras del entramado plano de la figura E3.2a. son inextensibles.

SE PIDE:

Obtener la matriz de rigidez total de la estructura. A efectos de este ejercicio se supone, por simplicidad, que  $EI=1$  y  $L=1$  para todas las barras.

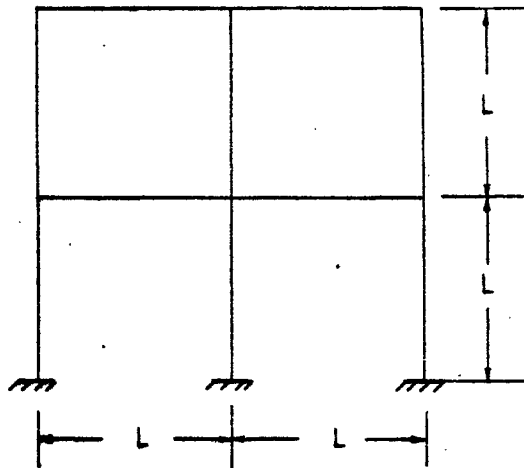


Fig. E3.2a

Los grados de libertad de la estructura se ven en la figura E3.2b.

$k_{ij}$ , es la fuerza en el grado de libertad  $i$  cuando en el  $j$  se aplica desplazamiento unidad, siendo cero los demás desplazamientos.

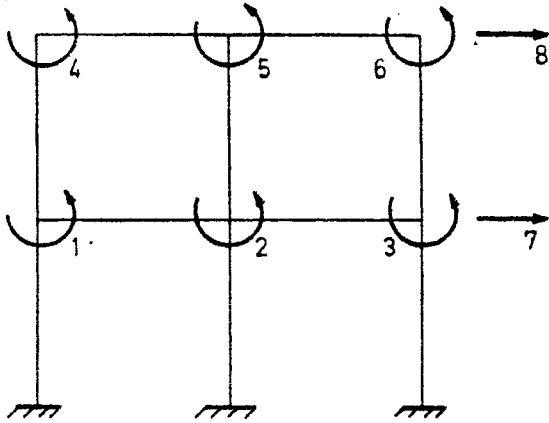


Fig. E3.2b

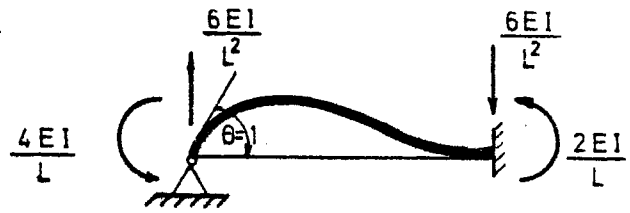


Fig. E2.2c

Si en una barra se da una deformación unidad se tiene el resultado de la figura E3.2c.

$$\frac{EI}{L} = 1 \quad \text{para todas las barras.}$$

Según esto:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 12; & k_{21} &= 2; & k_{31} &= 0; & k_{41} &= 2; & k_{51} &= 0; & k_{61} &= 0; & k_{71} &= 0; & k_{81} &= 6 \\ k_{22} &= 16; & k_{32} &= 2; & k_{42} &= 0; & k_{52} &= 2; & k_{62} &= 0; & k_{72} &= 0; & k_{82} &= 6 \\ k_{33} &= 12; & k_{43} &= 0; & k_{53} &= 0; & k_{63} &= 2; & k_{73} &= 0; & k_{83} &= 6 \\ k_{44} &= 8; & k_{54} &= 2; & k_{64} &= 0; & k_{74} &= -6; & k_{84} &= 6 \\ k_{55} &= 12; & k_{65} &= 2; & k_{75} &= -6; & k_{85} &= 6 \\ k_{66} &= 8; & k_{76} &= -6; & k_{86} &= 6 \\ k_{77} &= 72; & k_{87} &= -36 \\ k_{88} &= 36 \end{aligned}$$

La matriz de rigidez es:

$$\begin{bmatrix} 12 & & & & & & & \\ 2 & 16 & & & & & & \\ 0 & 2 & 12 & & & & & \\ 2 & 0 & 0 & 8 & & & & \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 12 & & & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 8 & & \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & -6 & 72 & \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & -36 & 36 \end{bmatrix}$$

*Simétrica*

Ejercicio E4.1.

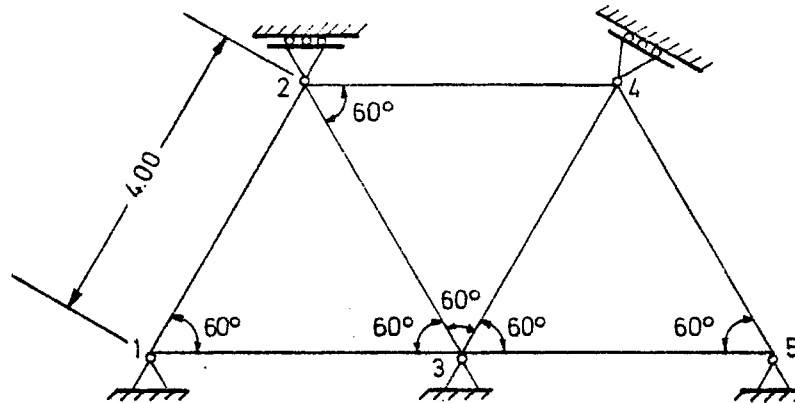


Fig. E4.1 a

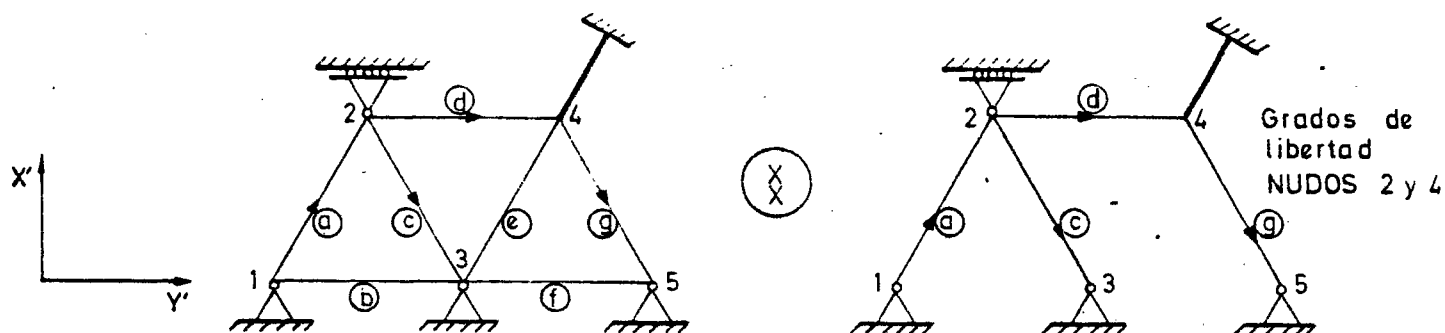
En la celosía plana de la figura E4.1a., todas las barras son de sección constante  $A=20 \text{ cm}^2$  y módulo de elasticidad  $E= 2,1 \times 10^6 \text{ .kg.cm}^{-2}$ .

La barra 2-3 sufre un incremento de longitud de 3 cm producido por la temperatura.

Se pide:

- 1).- Matriz de rigidez de la estructura.
- 2).- Movimientos de todos los nudos.
- 3).- Esfuerzos en todas las barras.
- 4).- Reacciones en los apoyos.

El apoyo del nudo 4 no es corcondante con los ejes generales  $(x', y')$  de la figura E4.1b. Se podría utilizar la técnica, de considerar ejes de nudo. No obstante aquí, se ha procedido a introducir una barra ficticia de rigidez a esfuerzo axial  $K$  muy grande y nula a flexión.



Las barras b, e y f no trabajan

Fig. E4.1b

Teniendo en cuenta la figura E4.1b. se tiene:

$$\underline{K'} = \begin{bmatrix} (K'_{22})_a + (K'_{11})_c + (K'_{11})_d & (K'_{12})_d \\ (K'_{21})_d & K' + (K'_{22})_d + (K'_{11})_g \end{bmatrix}$$

El cambio de ejes generales a particulares es (figura E4.1c.):

$$\begin{aligned} P_{x'} &= P_x \cos \alpha \\ P_{y'} &= P_x \sen \alpha \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sen \alpha \end{bmatrix} \cdot P_x \rightarrow T = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sen \alpha \end{bmatrix}$$

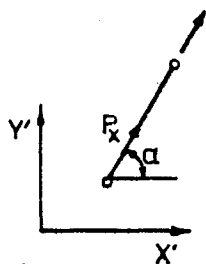


Fig. E4.1c

Las matrices de rigidez de cada elemento son:

$$(K_{22})_a = \frac{EA}{L}; \quad (K'_{22})_a = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

$$(K_{22})_a = \frac{EA}{L}; \quad \alpha=60^\circ; \quad (K'_{22})_a = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$(K_{11})_d = \frac{EA}{L}; \quad \alpha=0^\circ; \quad (K'_{11})_d = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(K_{11})_c = \frac{EA}{L}; \quad \alpha=120^\circ; \quad (K'_{11})_c = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$(K_{12})_d = -\frac{EA}{L}; \quad \alpha=0^\circ; \quad (K'_{12})_d = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(K_{21})_d = -\frac{EA}{L}; \quad \alpha=0^\circ; \quad (K'_{21})_d = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(K_{22})_d = \frac{EA}{L}; \quad \alpha=0^\circ; \quad (K'_{22})_d = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(K_{11})_g = \frac{EA}{L}; \quad \alpha=120^\circ; \quad (K'_{11})_g = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$K = K; \quad \alpha=60^\circ; \quad K' = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} K \cdot 1/4 & K \cdot \sqrt{3}/4 \\ K \cdot \sqrt{3}/4 & K \cdot 3/4 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez total es:

$$K' = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & - & - \\ 0 & 3/2 & - & - \\ -1 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & - & - \end{bmatrix}$$



Teniendo en cuenta que el apoyo 2 no puede tener desplazamiento vertical ( $d'_{y2}=0$ ) se tiene:

$$\begin{bmatrix} P'_{x2} \\ P'_{y2} \\ P'_{x4} \\ P'_{y4} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}+K & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{K+5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}(K-1) \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4}(K-1) & \frac{\sqrt{3}}{4}(K+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{x2} \\ d'_{y2} \\ d'_{x4} \\ d'_{y4} \end{bmatrix}$$

La fila y columna recuadradas se pueden no tener en cuenta en principio.

Siendo  $\Delta_{2-3} = 3$  cm. de alargamiento

$$F = \frac{EA}{L} \cdot \Delta_{2-3} = \frac{EA}{L} \cdot 3$$

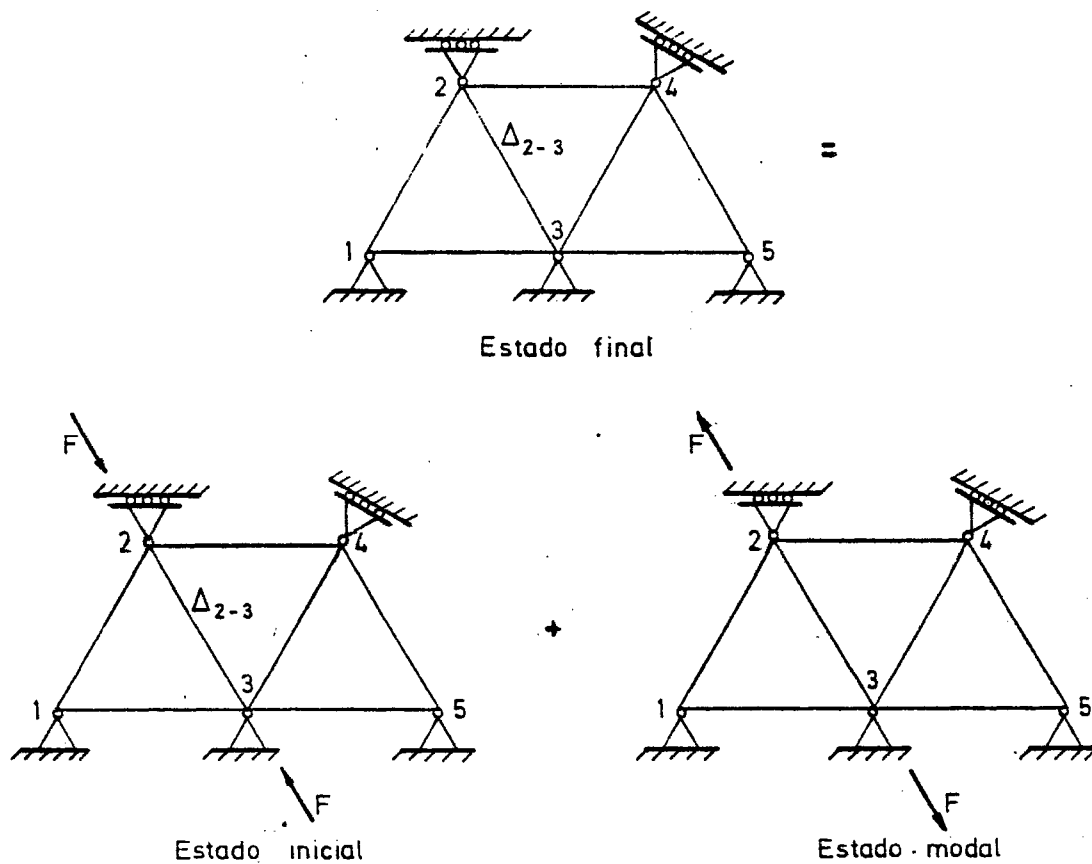


Fig. E 4.1d

Para la resolución del problema el estado real o final se descompone en los estados indicados en la figura E4.1d.

En la solución modal se tiene:

$$P'_{x2} = -\frac{3}{2} \frac{EA}{L}$$

$$P'_{y2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{EA}{L}$$

de donde se deduce:

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 3/2 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{K+5}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}(K-1) \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4}(K-1) & \frac{3}{4}(K+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{x2} \\ d'_{x4} \\ d'_{y4} \end{bmatrix}$$

invirtiendo queda:

$$|\Delta| = \frac{3}{8}(4K+1)$$

$$\begin{bmatrix} d'_{x2} \\ d'_{x4} \\ d'_{y4} \end{bmatrix} = \frac{8}{3(4K+1)} \begin{bmatrix} \frac{3}{4}(2K+1) & \frac{3}{4}(K-1) & \frac{-\sqrt{3}}{4}(K-1) \\ \frac{3}{4}(K+1) & \frac{9}{8}(K+1) & \frac{-3\sqrt{3}}{8}(K-1) \\ \frac{-\sqrt{3}}{4}(K-1) & \frac{-3\sqrt{3}}{8}(K-1) & \frac{3K+7}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d'_{x2} \\ d'_{x4} \\ d'_{y4} \end{bmatrix} = \frac{8}{3(4K+1)} \begin{bmatrix} -\frac{9}{8}(2K+1) \\ -\frac{9}{8}(K+1) \\ \frac{3\sqrt{3}}{8}(K-1) \end{bmatrix} \begin{cases} d'_{x2} = -3 \frac{2K+1}{4K+1} \\ d'_{x4} = -3 \frac{K+1}{4K+1} \\ d'_{y4} = \sqrt{3} \frac{K-1}{4K+1} \end{cases} \text{ cuando } K \rightarrow \infty \begin{cases} d'_{x2} = -\frac{3}{2} \\ d'_{x4} = -\frac{3}{4} \\ d'_{y4} = \sqrt{\frac{3}{4}} \end{cases}$$

## 2).- MOVIMIENTOS DE LOS NUDOS:

$$d'_{x2} = -1.5 \text{ cm.}$$

$$d'_{x4} = -0.75 \text{ cm.}$$

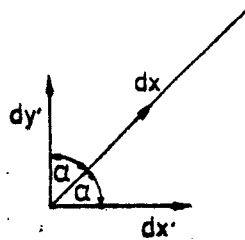
$$d'_{y2} = 0$$

$$d'_{y4} = 0.433 \text{ cm.}$$

3).- ESFUERZOS EN LAS BARRAS: Solución final= Solución inicial + Solución modal.

Hay que recordar que la solución inicial solo va a afectar a la barra 2-3.

$$d_x = d'_x \cos \alpha + d'_y \sin \alpha; \quad d = \begin{Bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d'_x \\ d'_y \end{Bmatrix} = \underline{T}^T \cdot \underline{d}'$$



Barra a:  $P_{2a} = (K_{22})_a \cdot d_{2a} = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{3EA}{4L} = -\frac{3 \cdot 2,1 \cdot 10^3 \cdot 20}{4 \cdot 400} \text{ ton} =$   
 $= 78,75 \text{ ton.}$

Barra c:  $(P_{1c}) = (K_{11})_c \cdot d_{1c} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\frac{3EA}{4L} = -78,75 \text{ ton.}$

Por la solución inicial:  $\frac{3EA}{L} = 315 \text{ ton.}$

Barra d:  $P_{1d} = (K_{11})_d \cdot d_{1d} + (K_{12})_d \cdot d_{2d} = \frac{EA}{L} \{1, 0\} \begin{bmatrix} -3/2 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{EA}{L} \{1 \ 0\} \begin{bmatrix} -3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} =$   
 $= -78,75 \text{ ton.}$

Barra g:  $P_{1g} = (K_{11})_g \cdot d_{1g} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/4 \\ \sqrt{3}/4 \end{bmatrix} = -\frac{3EA}{4L} = -78,75 \text{ ton.}$

Fijándose en los ejes locales de barra y llamando:

Tracción (+) } a la tracción positiva y a compresión negati-  
 Compresión (-) } va se puede hacer la tabla E4.1a.

BARRA	SOLUCION INICIAL	SOLUCION MODAL	ESFUERZO
1-2	0	-78,75	-78,75
1-3	0	0	0
2-3	-315	+78,75	-236.25
2-4	0	+78,75	+78,75
3-4	0	0	0
3-5	0	0	0
4-5	0	+78,75	+78,75

Tabla E4.1a.

A) Cálculo de las reacciones (en toneladas).

En los ejes generales (x', y'):  $\underline{R}_i$  = reacción en nudo i en ejes generales.

$$\underline{R}_1 = \underline{P}_{1a}' = \underline{T}_a \cdot (\underline{K}_{12})_a \cdot \underline{T}_a^t \cdot \underline{d}_2' = -\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,5 \cdot 10^{-2} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 1,05 \cdot 10^4 \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39,375 \\ 68,2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_2^{S.Modal} = \underline{P}_{2a}' + \underline{P}_{1c}' + \underline{P}_{1d}' = (\underline{K}_{22})_a \underline{d}_2' + (\underline{K}_{11})_c \underline{d}_2' + (\underline{K}_{11})_d \underline{d}_2' + (\underline{K}_{12})_d \underline{d}_4' =$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \underline{d}_2' - \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{d}_4' = 1,05 \cdot 10^2 \begin{bmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$- 1,05 \cdot 10^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,75 \\ 0,433 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta, además, la solución inicial:

$$\underline{R}_2 = 315 \begin{bmatrix} 1/2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} + 105 \begin{bmatrix} -2,25 + 0,75 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -272,8 \end{bmatrix}$$

S.inicial S.modal

$$\underline{R}_3 = 315 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} + \underline{P}_{2c}' = 315 \begin{bmatrix} -1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} + (\underline{K}_{21})_c \cdot \underline{d}_2' = 315 \begin{bmatrix} -1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} -$$

$$- 105 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,5 \\ 0 \end{bmatrix} = 315 \begin{bmatrix} -1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} - 105 \begin{bmatrix} -0,375 \\ +0,6495 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -118,125 \\ 204,6 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_4 = \underline{P}_{2d}^I + \underline{P}_{1g}^I = (K_{21}^I)_d \cdot \underline{d}_2^I + \{ (K_{22}^I)_d + (K_{11}^I)_g \} \underline{d}_4^I =$$

$$+105 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1,5 \\ 0 \end{bmatrix} + 105 \begin{bmatrix} 1,25 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,75 \\ 0,433 \end{bmatrix} = 105 \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0,6495 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 39,375 \\ 68,1975 \end{bmatrix}$$

La ventaja de operar con ejes de nudo estriba en que, en el apoyo 4 (no concordante), la reacción ya se obtiene en dichos ejes y no en los generales tal como sucede aquí.

$$\underline{R}_5 = \underline{P}_{2g}^I = (K_{21}^I)_g \cdot \underline{d}_4^I = -105 \begin{bmatrix} 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,75 \\ 0,433 \end{bmatrix} = -105 \begin{bmatrix} -0,375 \\ 0,6495 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 39,375 \\ -68,1975 \end{bmatrix}$$

Como comprobación se puede realizar el cálculo de la figura E4.1e.

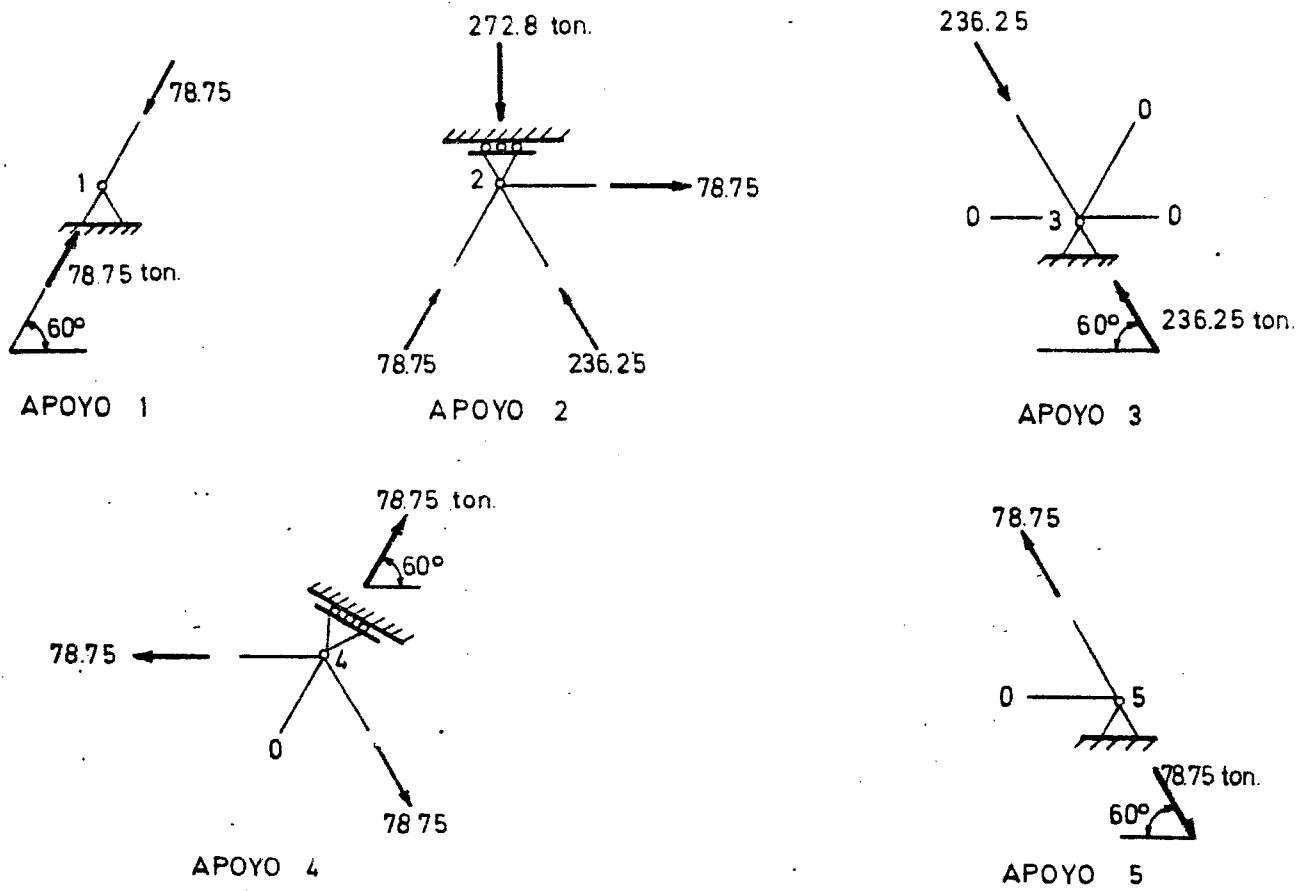


Fig E4.1e

El resultado final se representa en la figura E4.1f.

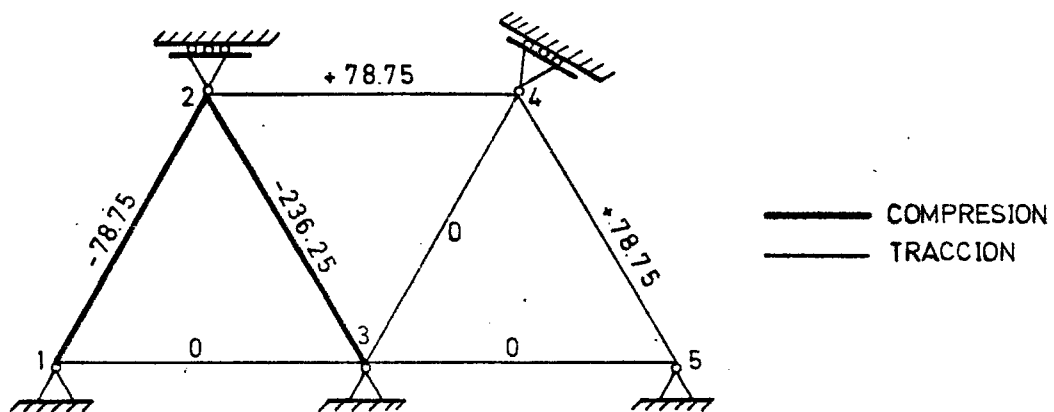


Fig E4.1f

Ejercicio E4.2.

Determinar las reacciones de apoyo del emparrillado de la figura E4.2a. suponiendo que las barras son prismáticas y tales que  $EI/GJ = 10$ . en los siguientes casos:

- 1) Nudos 1 y 3 coaccionados todos los movimientos.
- 2) El nudo 3 se liberaliza permitiendo la rotación a la torsión de la barra 2-3.

DATOS:

$$P = 100 \text{ t}$$

$$L = 10 \text{ m}$$

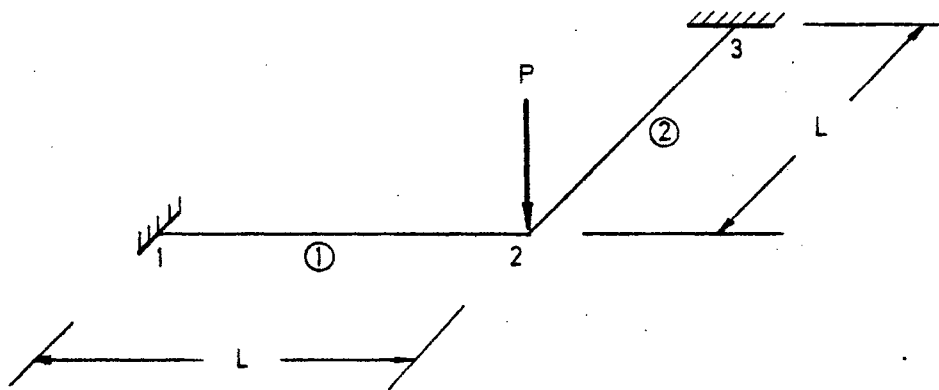


Fig. E4.2a.

a) -Matrices de rigidez en ejes locales.

La numeración de los grados de libertad de las barras 1 y 2 se representan en la figura E4.2b. (a) y (b).

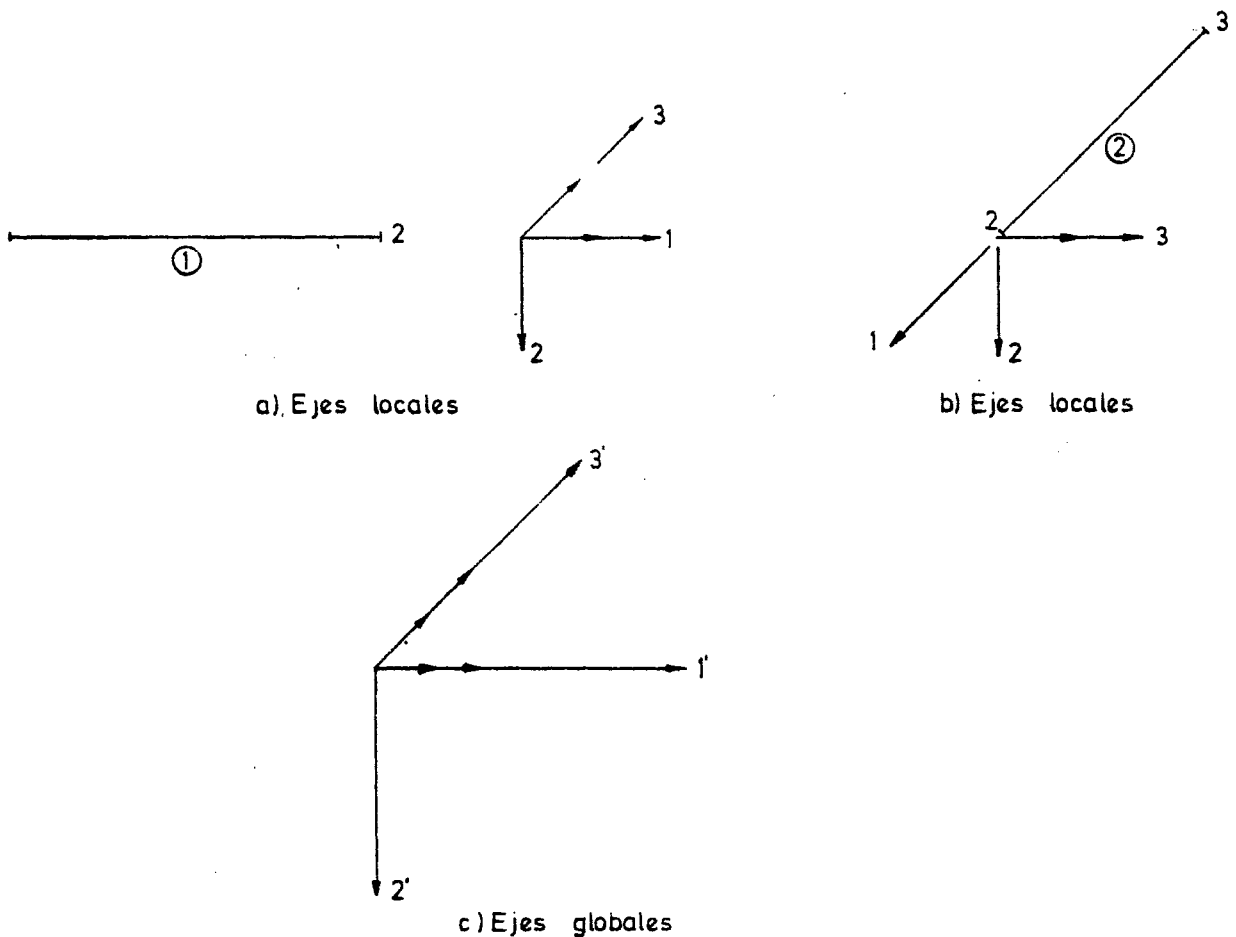


Fig. E4. 2 b

Las matrices de rigidez son entonces:

$$(k_{22})_i = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix}$$

con  $i=1,2$ .

Se adoptan como ejes globales 1', 2' y 3', los representados en la figura. E4.2b. (c).



Las matrices de transformación son:

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez en ejes globales son:

$$(k_{22}^1)_1 = (k_{22})_1 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix}$$

$$(k_{22}^1)_2 = \underline{T}_1 (k_{22})_2 \underline{T}_2^T = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{6}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

La ecuación de equilibrio del nudo 2 es:

$$\{(k_{22}^1)_1 + (k_{22}^1)_2\} \underline{d}_2^1 = \underline{p}_2^1$$

$$\text{con } \underline{p}_2^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{d}_2^1 = \begin{bmatrix} \theta_x \\ d_y \\ \theta_z \end{bmatrix}$$

es decir

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4,1 & -\frac{6}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L} & \frac{24}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & 4,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ d_y \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_x \\ d_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \frac{WL^2}{26,4EI} \begin{bmatrix} 6 \\ 4,1L \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,227 \\ 0,155L \\ 0,227 \end{bmatrix} PL^2$$

y las reacciones en el extremo 1 son:

$$\underline{R} = (\underline{k}_{12}^1) \underline{d}_2^1 = (\underline{k}_{12}) \underline{d}_2$$

o bien

$$\begin{bmatrix} M_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix}_1 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} -0,1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & 2 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{26,4EI} \begin{bmatrix} 6 \\ 4,1L \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,023 PL \\ -0,500 P \\ -0,477 PL \end{bmatrix}$$

y las reacciones en el otro extremo se deduce mediante simetría. En el caso numérico  $P=100 \text{ t}$  y  $L=10 \text{ m}$  se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \theta_x \\ d_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_2 = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 2273 \\ 1553 \\ 2273 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} M_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -23 \\ -50 \\ -477 \end{bmatrix}$$

b) La matriz de rigidez de la barra 2 (gdl activos) es:

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0,1 & -0,1 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x3} \\ \theta_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix}$$

Y eliminando el gdl  $\theta_{x3}$  por condición estática se deduce:

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ d_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} M_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (k_{22})_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \frac{EI}{L}$$

en ejes generales

$$(k'_{22})_2 = T_2 (k_{22})_i T_2^T = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{6}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L} & \frac{12}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación de equilibrio en el nudo 2 es:

$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 4,1 & -\frac{6}{L} & 0 \\ -\frac{6}{L} & \frac{24}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ d_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x \\ d_y \\ \theta_z \end{bmatrix}_2 = \frac{WL^2}{EI} \begin{bmatrix} 0,235 \\ 0,161L \\ 0,241 \end{bmatrix}$$

y las reacciones son:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix}_1 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} -0,1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & 2 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{EI} \begin{bmatrix} 0,235 \\ 0,161L \\ 0,241 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,023 PL \\ -0,486 P \\ -0,484 PL \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_y \\ M_z \end{bmatrix}_2 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{WL^2}{EI} \begin{bmatrix} 0,235 \\ 0,161L \\ 0,241 \end{bmatrix} =$$

$$PL \begin{bmatrix} 0 & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ 0 & -\frac{6}{L} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,241 \\ 0,161L \\ 0,235 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,522 P \\ -0,496 PL \end{bmatrix}$$

Los resultados numéricos son:

$$\begin{bmatrix} \theta_x \\ d_y \\ \theta_z \end{bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} 235 \\ 1610 \\ 241 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} M_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} -23 \\ -48,6 \\ -484 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} M_x \\ P_y \\ M_z \end{bmatrix}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -52,2 \\ -496 \end{bmatrix}$$

Ejercicio E4.3.

Determinar los esfuerzos en todas las barras de la estructura representada en la figura E4.3a.

$E = 3 \times 10^6 \text{ t/m}^2$ .

Barras de hormigón de 0,50 m. de canto y 0,20 m. de ancho.

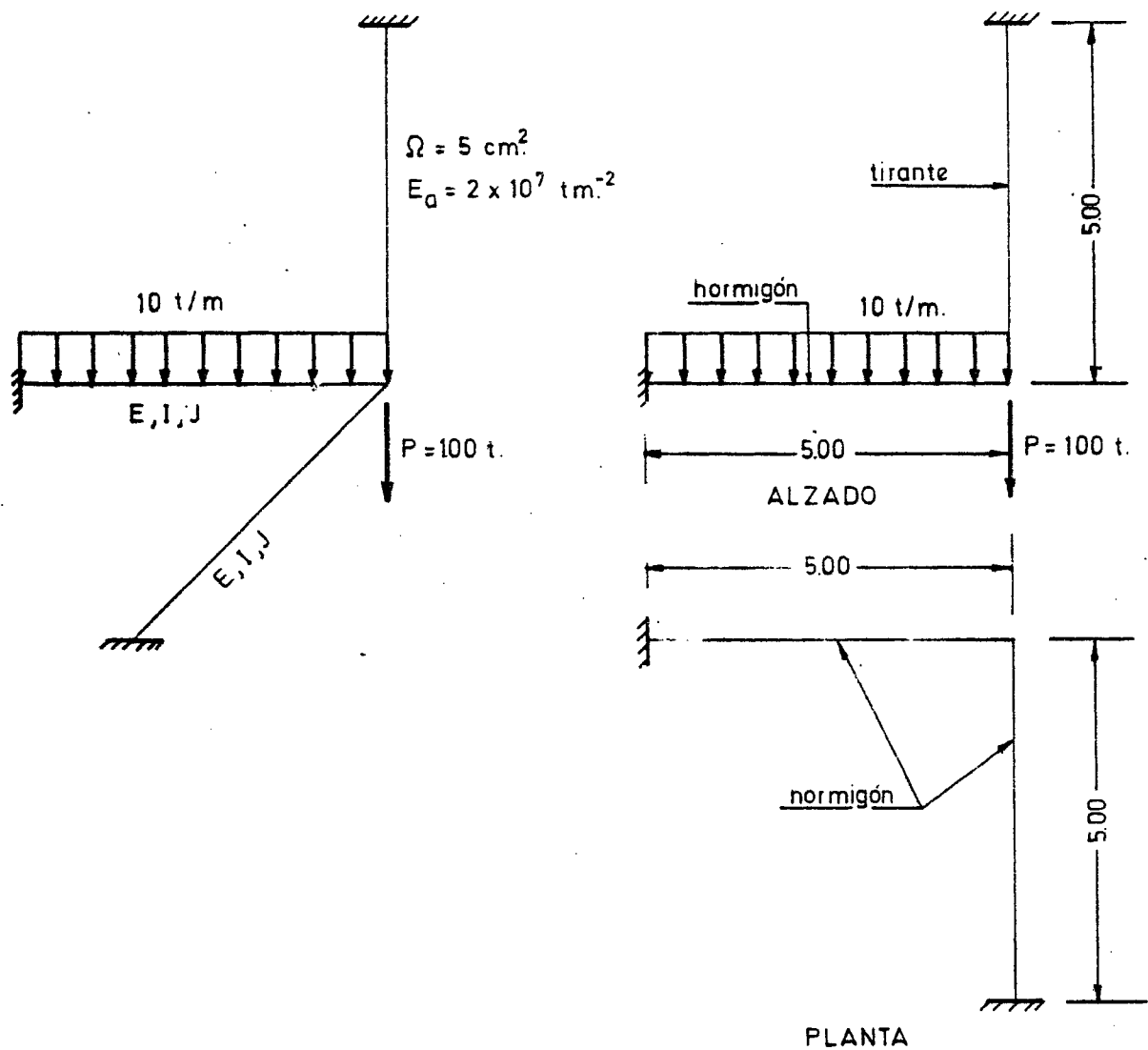


Fig. E4.3a

Considerando la figura E4.3b. se tiene:

$$\underline{K}' = (K'_{22})_a + (K'_{22})_b + (K'_{22})_c$$

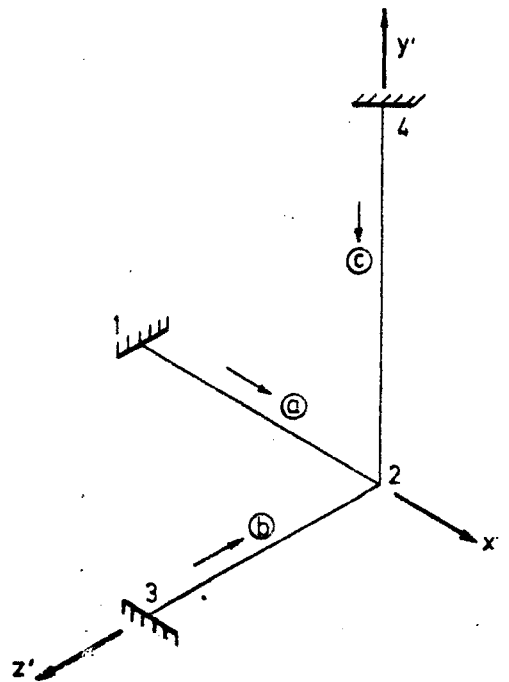


Fig. E4.3 b

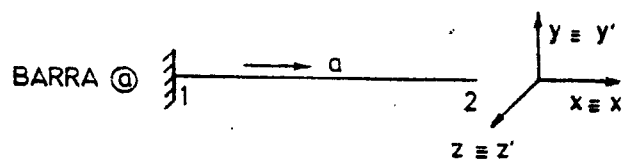
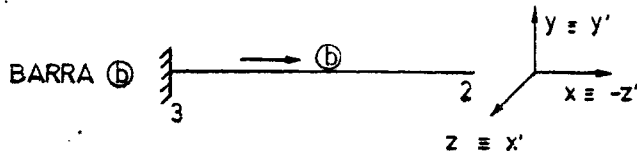


Fig. E4.3 c

$$\begin{bmatrix} M_{x2} \\ P_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}}_{(K_{22})_a} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_a} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$(K'_{22})_a = T_a (K_{22})_a T_a^t = (K_{22})_a$$

Barra b



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

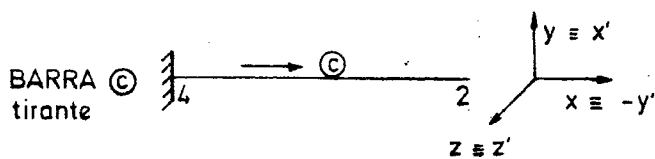
$T_b$

Fig. E 4.3 d

$$(K_{22})_b = (K_{22})_a$$

$$(K'_{22})_b = T_b \cdot (K_{22})_b \cdot T_b^t = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix}$$

Barra c - tirante.



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$T_c$

Fig. E 4.3 e

$$(K_{22})_c = \begin{bmatrix} \frac{Ea\Omega}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (K'_{22})_c = T_c \cdot (K_{22})_c \cdot T_c^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Ea\Omega}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez total es:

$$\underline{K'} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} + \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{24EI}{L^3} + \frac{E_a \Omega}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{GJ}{L} + \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

SUSTITUCION DE LOS DATOS

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \begin{cases} E = 3 \times 10^6 \\ \nu = 0,2 \end{cases} \rightarrow G = 1,25 \times 10^6 \text{ t/m}^2.$$

$$J = a^3 b \{0,33 - 0,22 \frac{a}{b}\} \quad \text{con} \quad a < b \quad \begin{cases} a = 0,20 \\ b = 0,50 \end{cases} \rightarrow J = 9,68 \times 10^{-4} \text{ m}^4.$$

Luego:

$$\left. \begin{array}{l} E = 3 \times 10^6 \text{ t.m}^{-2} \\ L = 5 \text{ m} \\ I = 20,38 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\ \Omega = 5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \\ G = 1,25 \times 10^6 \text{ tm}^{-2} \\ J = 9,68 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\ E_a = 2 \times 10^7 \text{ tm}^{-2} \end{array} \right\} \rightarrow \underline{K'} = 10^3 \begin{bmatrix} 5,24 & -1,5 & 0 \\ -1,5 & 3,2 & -1,5 \\ 0 & -1,5 & 5,24 \end{bmatrix}$$

Las acciones externas se consideran como se indica en la figura E4.3f.

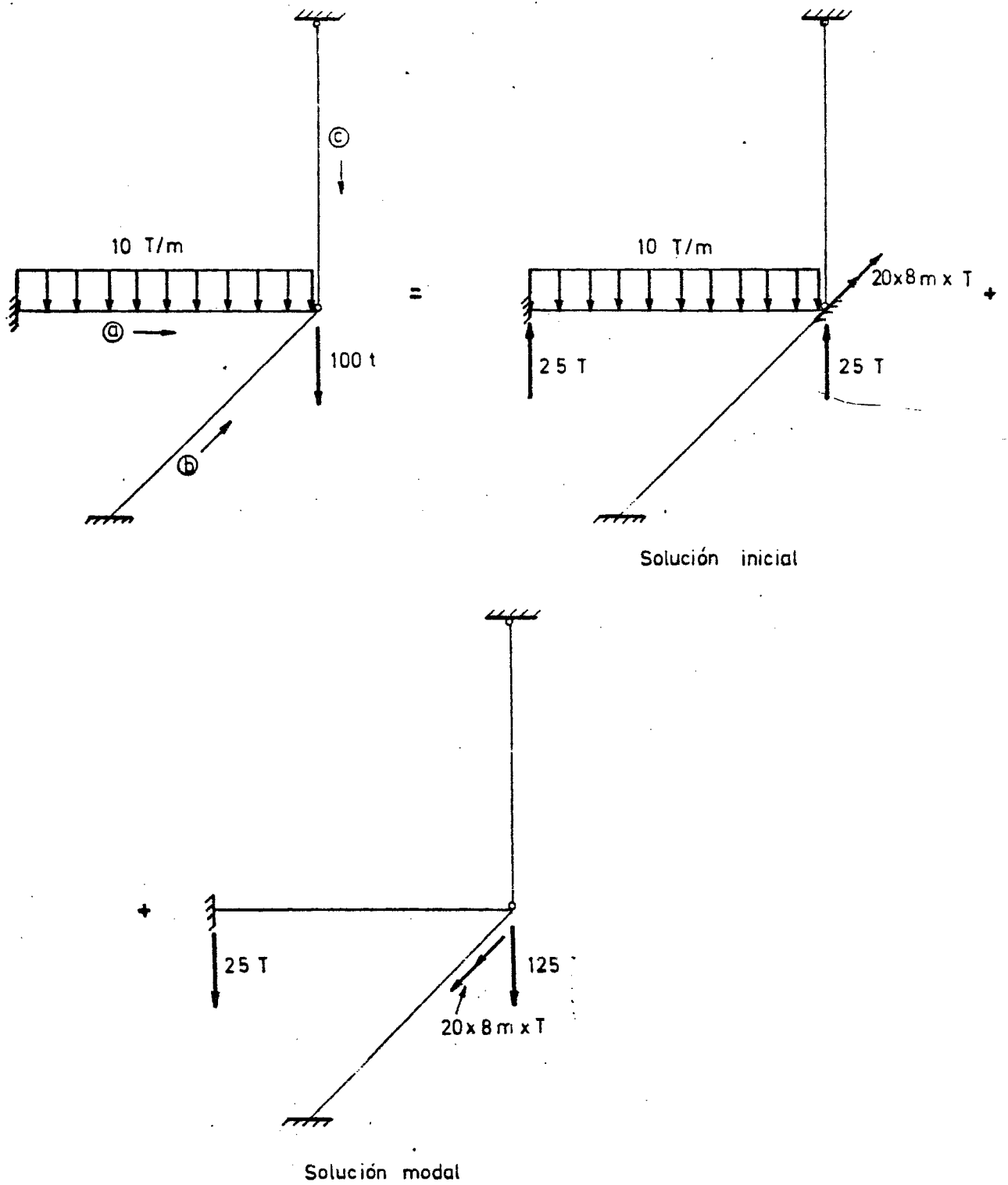


Fig. E4.3 f



Por tanto, el vector de cargas, en la solución modal, es:

$$\underline{P}' = \begin{bmatrix} M'_{x2} \\ P'_{y2} \\ M'_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -125 \\ 20,8 \end{bmatrix} ; \quad \underline{P}' = \underline{K}' \cdot \underline{d}'$$

$$\begin{cases} 0 = 10^3 \{ 5,24 \theta'_{x2} - 1,5 \cdot d'_{y2} \} & 0 = 5,24x - 1,5y \\ -0,125 = 10^3 \{ -1,5 \theta'_{x2} + 3,2 d'_{y2} - 1,5 \theta'_{z2} \} & -0,125 = 1,5x + 3,2y - 1,5z \\ 20,8 = 10^3 \{ -1,5 d'_{y2} + 5,24 \theta'_{z2} \} & 0,0208 = -1,5y + 5,24z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= \theta'_{x2} = -14,56 \times 10^{-3} \text{ rd.} \\ y &= d'_{y2} = -50,85 \times 10^{-3} \text{ m.} \\ z &= \theta'_{z2} = -10,59 \times 10^{-3} \text{ rd.} \end{aligned}$$

LOS ESFUERZOS EN LAS BARRAS son:

$$\underline{K}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} ; \quad \underline{K}_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

Solución modal  $\underline{P}_1 = \underline{K}_{12} \cdot \underline{d}_2$   
 $\underline{P}_2 = \underline{K}_{22} \cdot \underline{d}_2$

$$\underline{P}_1 = 10^3 \begin{bmatrix} -0,242 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 1,5 \\ 0 & -1,5 & 2,5 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \begin{bmatrix} -14,56 \\ -50,85 \\ -10,59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,52 \\ 14,63 \\ 49,80 \end{bmatrix} ;$$

$$\underline{P}_2 = \begin{bmatrix} 0,242 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & -1,5 \\ 0 & -1,5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14,56 \\ -50,85 \\ -10,59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,52 \\ -14,63 \\ 23,33 \end{bmatrix}$$

El resultado final se halla sumando las soluciones inicial y modal (figura E4.3g.).

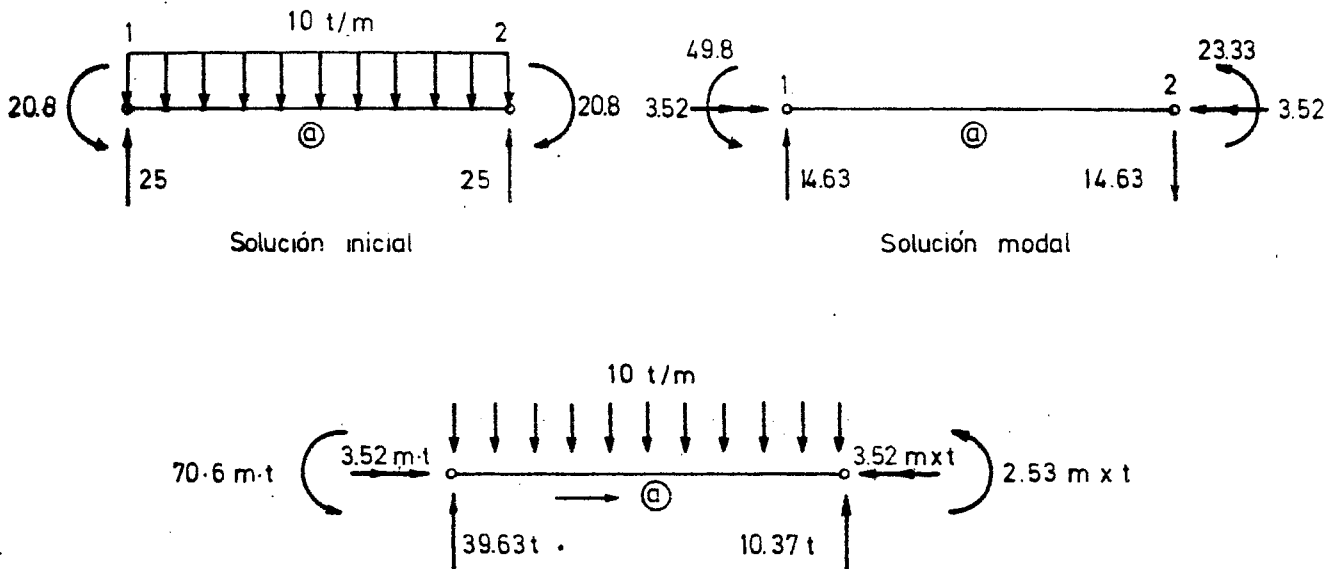


Fig. E4.3g

Barra b. Sólo hay esfuerzos debido a la solución modal

$$P_1 = K_{12} \cdot T_b^t \cdot d_2^i = \begin{bmatrix} -0,242 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & -1,5 \\ 0 & -1,5 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14,56 \\ -50,85 \\ -10,59 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -0,242 & 0 & 0 \\ 0 & -0,6 & 1,5 \\ 0 & -1,5 & 2,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10,59 \\ -50,85 \\ -14,56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,56 \\ 8,67 \\ 39,88 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = K_{22} \cdot T_b^t \cdot d_2^i = \begin{bmatrix} 0,242 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & -1,5 \\ 0 & -1,5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10,59 \\ -50,85 \\ -14,56 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,56 \\ -8,67 \\ 3,48 \end{bmatrix}$$

El resultado se expresa en la figura E4.3h.

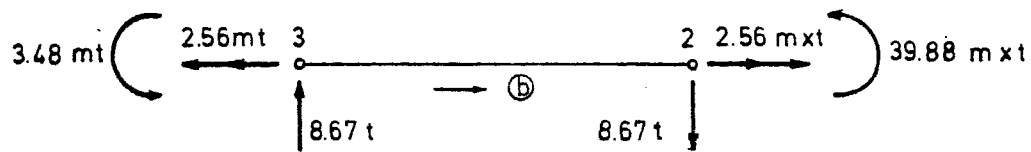


Fig E4.3h

Barra c.  $p_2 = (K_{22})_c \cdot T_c^t \cdot d_2^i$

$$p_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14,56 \\ -50,85 \\ -10,59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50,85 \\ -14,56 \\ -10,59 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 101,7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El resultado se representa en la figura E4.2i.

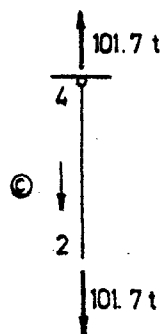


Fig. E4.3i

La comprobación equilibrio fuerzas nudo 2 se hace en la figura E4.3j.

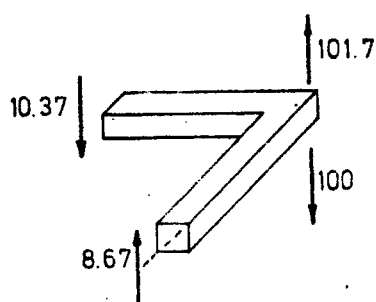


Fig. E4.3j

Ejercicio E4.4.

La estructura emparrillado plano de la figura E4.4a. está sometida a la carga vertical uniforme de  $2 \text{ t.m}^{-1}$  sobre la barra 3-5. Se pide:

Calcular el movimiento del nudo 3.

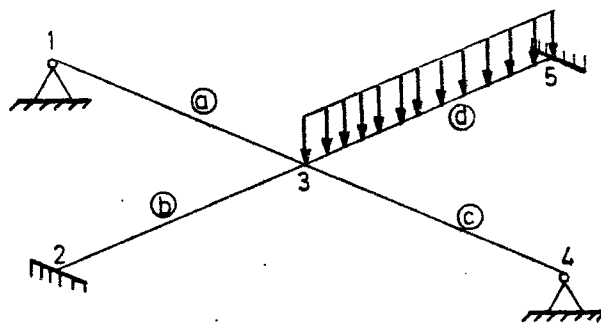


Fig. E4.4a

Todas las barras tienen igual luz = 6 m. y características elásticas:

$$E = 3 \times 10^6 \text{ t.m}^{-2}$$

$$I = 0,0050 \text{ m}^4 \text{ (inercia a flexión)}$$

$$J = 0,0030 \text{ m}^4 \text{ (inercia a torsión)}$$

$$\nu = 0,20$$

No se considera la deformación de cortante.

Los nudos 2 y 5 están totalmente empotrados y el nudo 1 articulado a flexión (el giro a torsión y movimiento vertical están impedidos), y en el nudo 4 está impedido el giro a flexión y el movimiento vertical.

Se utilizará en la resolución de esta problema los siguientes procedimientos:

- Método general matricial, con introducción a posteriori de las condiciones de apoyo.
- Condensación estática de los grados de libertad no activos a nivel de elemento.

a) Método general.

Se considera la nomenclatura indicada en la figura E4.4b.

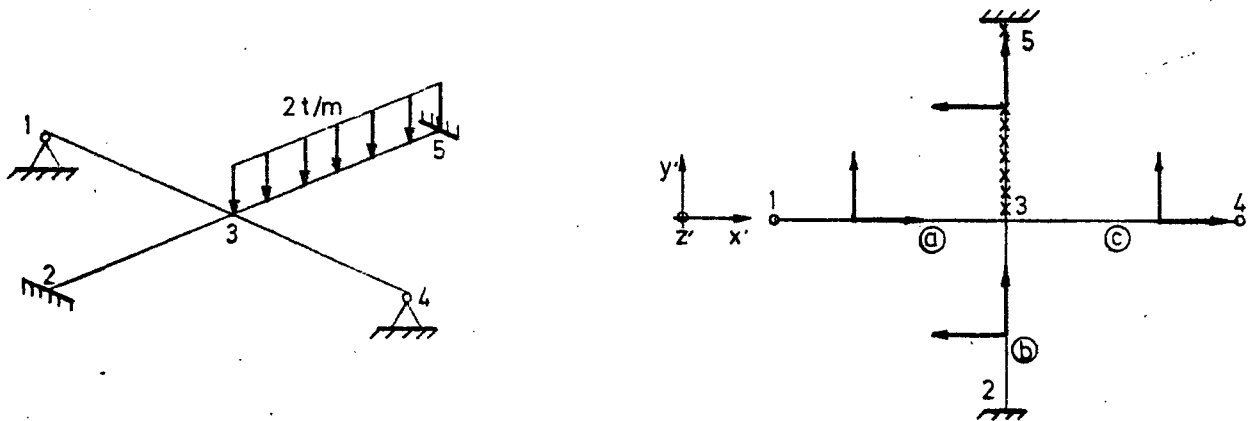


Fig. E4.4 b

El problema se resolverá descomponiéndolo en dos estados inicial y modal (figura E4.4c.).

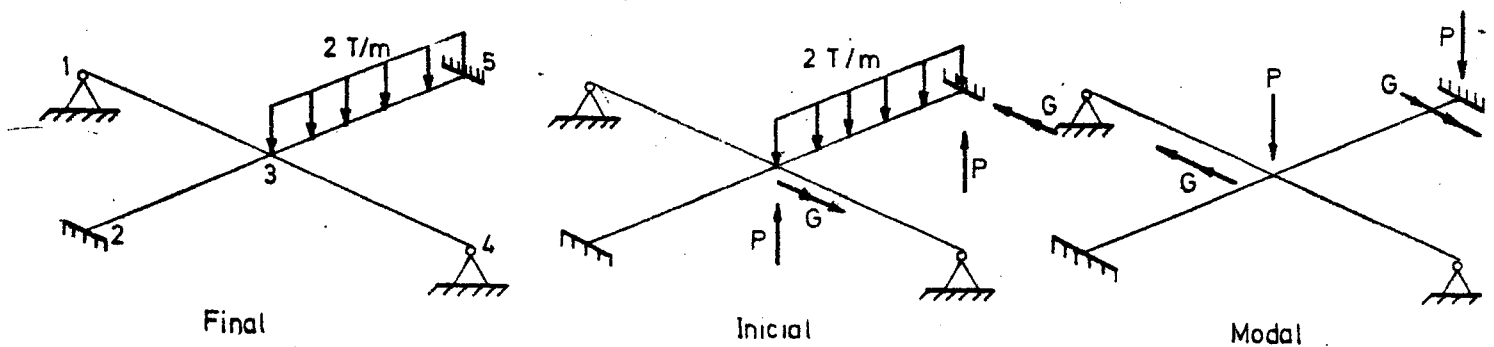


Fig. E4.4 c

$$\text{SOLUCION FINAL} = \text{SOLUCION INICIAL} + \text{SOLUCION MODAL}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{P}_1 \\ \underline{P}_3 \\ \vdots \\ \underline{P}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{K}_{11}^I)_a & (\underline{K}_{12}^I)_a & \underline{0} \\ (\underline{K}_{21}^I)_a & (\underline{K}_{22}^I)_a + (\underline{K}_{11}^I)_c + (\underline{K}_{22}^I)_b + (\underline{K}_{11}^I)_d & (\underline{K}_{12}^I)_c \\ \underline{0} & (\underline{K}_{21}^I)_c & (\underline{K}_{22}^I)_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_3 \\ \underline{d}_4 \end{bmatrix}$$

$$\text{con } \underline{d}_i = \begin{bmatrix} \theta_{xi} \\ d_{2i} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \quad y$$

$$\underline{P}_i = \begin{bmatrix} G_{xi} \\ P_{zi} \\ G_{yi} \end{bmatrix}$$

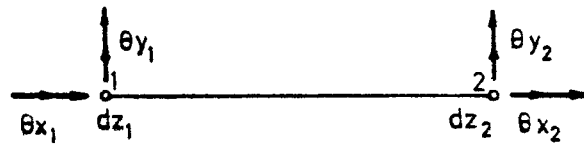


Fig. E4. 4d

$$K_{11} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad K_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \end{bmatrix} \quad K_{22} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{3 \times 10^6}{2 \times 1,2} = \frac{3}{2,4} \times 10^6$$

$$\frac{GJ}{L} = \frac{3 \times 10^6}{2,4} \times \frac{3 \times 10^{-3}}{6} = \frac{3}{4,8} \times 10^3$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \times 3 \times 10^6 \times 5 \times 10^{-3}}{6 \times 6 \times 6} = \frac{5}{6} \times 10^3$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6 \times 3 \times 10^6 \times 5 \times 10^{-3}}{6 \times 6} = \frac{5}{2} \times 10^3$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2 \times 3 \times 10^6 \times 5 \times 10^{-3}}{6} = 5 \times 10^3$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4 \times 3 \times 10^6 \times 5 \times 10^{-3}}{6} = 10 \times 10^3$$

Barras b y d:

$$\begin{aligned} x &= y' \\ z &= z' \\ y &= -x' \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ z' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{K}_{22}^i)_b = \underline{T} \cdot (\underline{K}_{22})_b \underline{T}^t ; \quad (\underline{K}_{11}^i)_d = \underline{T} \cdot (\underline{K}_{11})_d \underline{T}^t$$

$$(\underline{K}_{22}^i)_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} \frac{4}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{4,8} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{6} & 0 \\ -10 & -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 10 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4,8} \end{bmatrix}$$

$$(\underline{K}_{11}^i)_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} 10^3 \begin{bmatrix} \frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{3}{4,8} \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{6} & 0 \\ -10 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 10 & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4,8} \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura es:

$$\begin{bmatrix} G'_{x1} \\ P'_{z1} \\ G'_{y1} \\ P'_3 \\ G'_{x4} \\ P'_{z4} \\ G'_{y4} \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} \frac{3}{4,8} & 0 & 0 & -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/6 & 5/2 & 0 & -5/6 & 5/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 10 & 0 & -5/2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 & \frac{51}{2,4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & -5/2 & 0 & \frac{20}{6} & 0 & 0 & -5/6 & 5/2 \\ 0 & +5/2 & 5 & 0 & 0 & \frac{51}{2,4} & 0 & -5/2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 & \frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5/6 & -5/2 & 0 & 5/6 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/2 & 5 & 0 & -5/2 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Introducción de las condiciones de contorno

$$\begin{array}{lcl}
 \text{NUDO 1} & \left\{ \begin{array}{l} \theta_{x1}=0 \\ d_{z1}=0 \\ \theta_{y1} \neq 0 \quad (M_{y1}=0.) \end{array} \right. & \text{NUDO 4} \left\{ \begin{array}{l} \theta_{x4} \neq 0 \quad (M_{x4}=0) \\ d_{z4}=0 \\ \theta_{y4}=0. \end{array} \right.
 \end{array}$$

Se pueden utilizar el método general pero en este caso se consideran muelles ficticios para simular estas condiciones de borde cinemáticas. Sea K un número grande.

La matriz de rigidez queda:



$$\begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{P}_3 = 10^3 \\ \underline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4,8} + K & 0 & 0 & -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} + K & \frac{5}{2} & 0 & -5/6 & 5/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 10 & 0 & -5/2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 & \frac{51}{2,4} & 0 & 0 & -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & -5/2 & 0 & \frac{20}{6} & 0 & 0 & -5/6 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & 5 & 0 & 0 & \frac{51}{2,4} & 0 & -5/2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 & \frac{3}{4,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5/6 & -5/2 & 0 & \frac{5}{6} + K & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/2 & 5 & 0 & -5/2 & 10+K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_1 \\ \underline{d}_3 \\ \underline{d}_4 \end{bmatrix}$$

Los grados de libertad de los nudos 1 y 4 se pueden eliminar de forma particionada.

Se obtiene así:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \underline{K}_{11} \cdot \underline{d}_1 + \underline{K}_{12} \cdot \underline{d}_3 \\ 0 &= \underline{K}_{32} \cdot \underline{d}_3 + \underline{K}_{33} \cdot \underline{d}_4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \underline{d}_1 &= -\underline{K}_{11}^{-1} \cdot \underline{K}_{12} \cdot \underline{d}_3 \\ \underline{d}_4 &= -\underline{K}_{33}^{-1} \cdot \underline{K}_{32} \cdot \underline{d}_3 \end{aligned} \right\}$$

$$\underline{P}_3 = \underline{K}_{21} \cdot \underline{d}_1 + \underline{K}_{22} \cdot \underline{d}_3 + \underline{K}_{23} \cdot \underline{d}_4$$

$$P_3 = \{-K_{21} \cdot K_{11}^{-1} \cdot K_{12} + K_{22} - K_{23} \cdot K_{33}^{-1} \cdot K_{32}\} \cdot d_3$$

$$K_{11} = 10^3 \begin{bmatrix} \frac{3}{4,8} + K & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} + K & 5/2 \\ 0 & 5/2 & 10 \end{bmatrix} ; \Delta_{11} = 10^3 \cdot (10K^2 + \dots)$$

Dado que  $K \rightarrow \infty$  sólo interesan los menores que contengan términos en  $K^2$

$$K_{11} = \frac{10^{-3}}{10} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_{33} = 10^3 \begin{bmatrix} \frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} + K & -5/2 \\ 0 & -5/2 & 10 + K \end{bmatrix} ; \Delta_{33} = 10^3 \cdot \left( \frac{3}{4,8} K^2 + \dots \right)$$

$$K_{33}^{-1} = 10^{-3} \cdot \frac{4,8}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & -5/2 \\ 0 & 5/2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & 5/2 \\ 0 & -5/2 & 5 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & 5/2 \\ 0 & -5/2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{4} & -\frac{25}{2} \\ 0 & -\frac{25}{2} & 25 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & 5/2 \\ 0 & -5/2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & -5/2 \\ 0 & 5/2 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & -5/6 & -5/2 \\ 0 & 5/2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4,8^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_3 = 10^3 \left\{ -0,1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{25}{4} & -\frac{25}{2} \\ 0 & -\frac{25}{2} & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{51}{2,4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{20}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{51}{2,4} \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. - \frac{4,8}{3} \begin{bmatrix} \frac{9}{4,8^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} d_3$$

$$\begin{bmatrix} M_{x'3} \\ P_{z'3} \\ M_{y'3} \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} \frac{99}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{32,5}{12} & \frac{2,5}{2} \\ 0 & \frac{2,5}{2} & \frac{45}{2,5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x'3} \\ d_{z'3} \\ \theta_{y'3} \end{bmatrix} \quad \{4.4a.\}$$

Invirtiendo se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \theta_{x'3} \\ d_{z'3} \\ \theta_{y'3} \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,04849 & 0 & 0 \\ 0 & 0,38095 & -0,02540 \\ 0 & -0,02540 & 0,05503 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{z'3} \\ P_{z'3} \\ M_{y'3} \end{bmatrix}$$

Solución final = Solución inicial + Solución modal

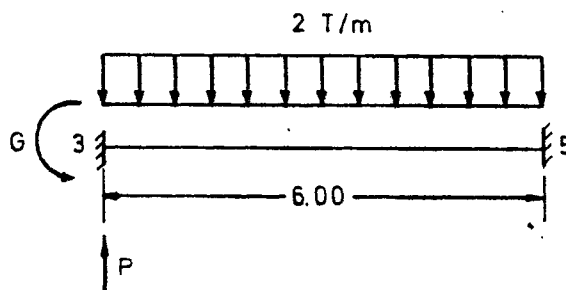


Fig. E4 4e

$$P = \frac{2 \times 6}{2} = 6 \text{ t.}$$

$$M = \frac{2 \times 6^2}{12} = 6 \text{ mxt.}$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} M_{x'3} \\ P_{z'3} \\ M_{y'3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{x'3} \\ dz'3 \\ \theta_{y'3} \end{bmatrix} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0,04849 & 0 & 0 \\ 0 & 0,38095 & -0,02540 \\ 0 & -0,02540 & 0,05503 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{cases} \theta_{x'3} = -0,29094 \text{ rad.} \\ \cdot 10^{-3} \\ dz'3 = 2,2857 \text{ m.} \cdot 10^{-3} \\ \theta_{y'3} = -0,1524 \text{ rad.} \\ \cdot 10^{-3} \end{cases}$$

(b) Condensación estática a nivel de elemento.

En general si en la matriz de una barra (elemento) se particiona de acuerdo con los grados de libertad activos (a) y b no activos (b), se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \underline{P}_a \\ \underline{P}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{aa} & k_{ab} \\ k_{ba} & k_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d}_a \\ \underline{d}_b \end{bmatrix} \quad \{4.4b.\}$$

Si  $\underline{P}_b = 0$ , se tiene  $\underline{d}_b = -k_{bb}^{-1} k_{ba} \underline{d}_a$  y la matriz de rigidez condensada es:

$$k_{aa}^* = k_{aa} - k_{ab} k_{bb}^{-1} k_{ba} \quad \{4.4c.\}$$

En este caso la matriz de rigidez de las barras del emparrillado es:

Barra b y d:

$$(\underline{K}_{22}^1)_b = 10^3 \begin{bmatrix} 10 & \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4,8} \end{bmatrix} \quad (\underline{K}_{11}^1)_d = 10^3 \begin{bmatrix} 10 & -\frac{5}{2} & 0 \\ -\frac{5}{2} & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4,8} \end{bmatrix}$$

Barra a

$$(K')_a = 10^3 \begin{bmatrix} \frac{3}{4,8} & 0 & 0 & -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{5}{6} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 10 & 0 & -\frac{5}{2} & 5 \\ -\frac{3}{4,8} & 0 & 0 & \frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{5}{2} & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 5 & 0 & -\frac{5}{2} & 10 \end{bmatrix}$$

En el nudo 1 de esta barra: (nudo 1 general):  
 $\theta_{x1}=0$  y  $d_{z1}=0$ . En cambio el giro de flexión no está  
 coaccionado y  $M_{y1}=0$ . Se tiene pues en este caso, según  
 la nomenclatura de {4.4b}:

$$\underline{k}_{aa} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 10 \end{bmatrix} \quad \underline{k}_{bb} = 10$$

$$\underline{k}_{ba} = (0, -\frac{5}{2}, 5) = \underline{k}_{ab}^T$$

Por lo tanto, aplicando la fórmula de condensación  
 estática {4.4c} se tiene:

$$\underline{k}_{aa}^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{5}{2} \\ 5 \end{bmatrix} \frac{1}{10} (0, -\frac{5}{2}, 5) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{24} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -\frac{5}{4} & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

Barra c

$$(\underline{K}')_c = (\underline{K}')_a$$

Es una barra idéntica a la a

En este caso en el nudo 2 (nudo 4 general) de la barra, existen las siguientes coacciones al movimiento:  $d_{z4}=0$  y  $\theta_{y4}=0$ . En cambio el giro de torsión no está -- coaccionado y  $M_{z4}=0$ . Por lo tanto, se tiene, en este caso:

$$\underline{k}_{aa} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 10 \end{bmatrix}, \quad \underline{k}_{bb} = \left\{ \frac{3}{4,8} \right\}$$

$$\underline{k}_{ba} = \left\{ -\frac{3}{4,8}, 0, 0 \right\} = \underline{k}_{ab}^T$$

Por lo tanto:

$$\underline{k}_{aa}^* = \begin{bmatrix} \frac{3}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{3}{4,8} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{32}{3} \left\{ -\frac{3}{4,8}, 0, 0 \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 10 \end{bmatrix}$$

La matriz de rigidez de la estructura, se obtiene mediante adición de las matrices condensadas anteriores y resulta:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 10+10+\frac{3}{4,8} & \frac{5}{2}-\frac{5}{2} & 0 \\ \frac{5}{2}-\frac{5}{2} & \frac{5}{6}+\frac{5}{6}+\frac{5}{24}+\frac{5}{6} & \frac{5}{2}-\frac{5}{4} \\ 0 & \frac{5}{2}-\frac{5}{4} & \frac{3}{4,8}+\frac{3}{4,8}+\frac{15}{2}+10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{99}{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{32,5}{12} & \frac{2,5}{2} \\ 0 & \frac{2,5}{2} & \frac{45}{2,4} \end{bmatrix}$$

Esta matriz coincide con la obtenida en el método general. Fórmula{4.4a.}

Ejercicio E4.5.

En la estructura articulada de la figura E4.5a. todas las barras son de sección constantes y tales que  $E\Omega/L=10^3 \text{ tm}^{-1}$ . La barra 4-5 sufre un incremento de la longitud de 5 cm. se pide:

- 1) Desplazamientos en todos los nudos referidos a los ejes ( $x'$ ,  $y'$ ).
- 2) Esfuerzos en todas las barras.
- 3) Reacciones en los apoyos.

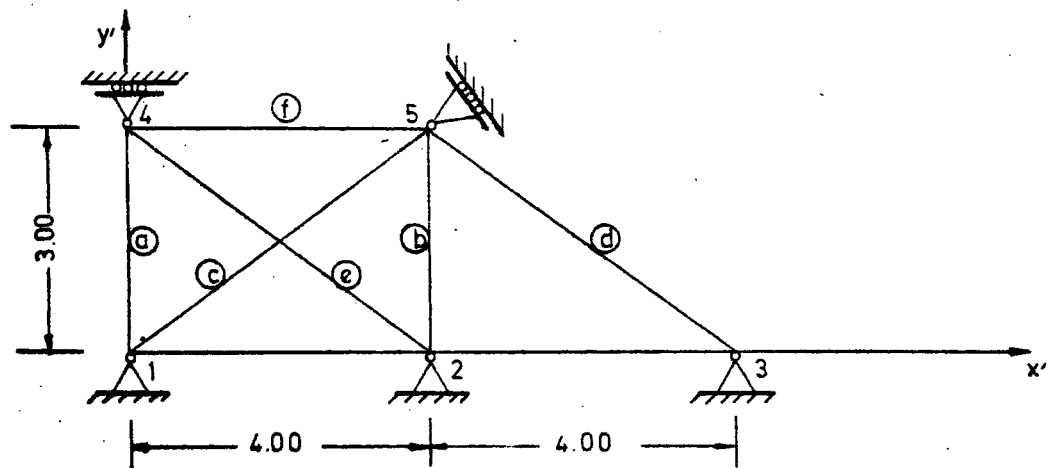


Fig. E4.5a



El apoyo del nudo 5 no es concordante con los ejes generales  $(x', y')$  de la figura E4.5a. Se podría utilizar la técnica de considerar ejes de nudo. No obstante aquí se ha procedido a introducir una barra ficticia de rigidez a esfuerzo axial  $K$  muy grande y nula a flexión.

Se consideran los sentidos de la figura E4.5b.

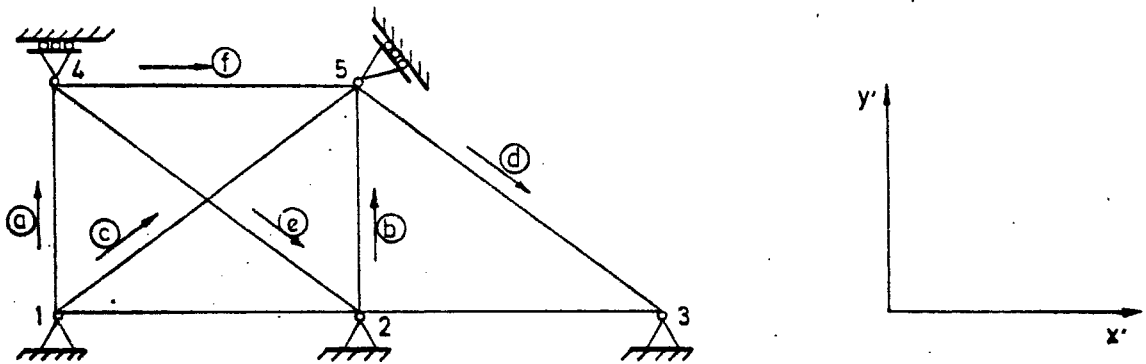


Fig. E4.5b

A efectos de trabajo quedan las barras de la figura E4.5c.

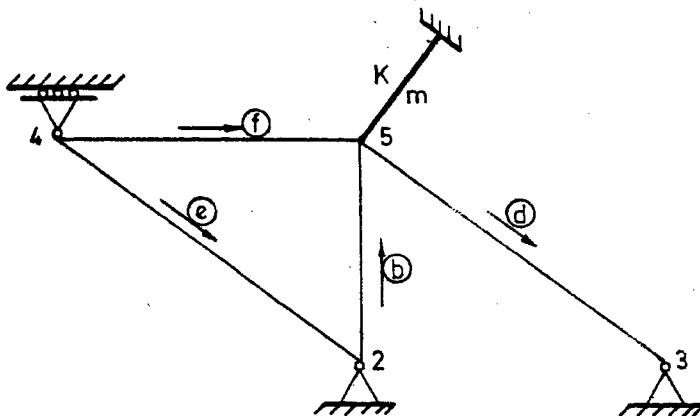


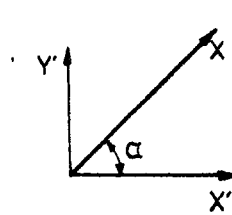
Fig. E4.5c

$$\underline{K}' = \begin{bmatrix} (\underline{K}_{11}')_e + (\underline{K}_{11}')_f & (\underline{K}_{12}')_f \\ (\underline{K}_{21}')_f & \underline{K}_m' + (\underline{K}_{22}')_f + (\underline{K}_{22}')_b + (\underline{K}_{11}')_d \end{bmatrix}$$

Las matrices de rigidez en ejes locales son:

$$(\underline{K}_{11}')_e = (\underline{K}_{11}')_f = (\underline{K}_{22}')_f = (\underline{K}_{22}')_b = (\underline{K}_{11}')_d = \frac{EA}{L};$$

$$(\underline{K}_{12}')_f = (\underline{K}_{21}')_f = -\frac{EA}{L}$$



$$\begin{aligned}
 X' &= X \cos \alpha \\
 Y' &= Y \sin \alpha \\
 \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} X \\
 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} x
 \end{aligned}$$

Fig. E4.5d

Considerando el cambio de base de la figura E4.5d. se tiene:

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}; \quad \underline{I}^T = [\cos \alpha \quad \sin \alpha]; \quad \underline{K}' = K \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

(por ser K un número).

$$\text{Barra e: } \begin{cases} \cos \alpha = 4/5 \\ \sin \alpha = -3/5 \end{cases} \quad (\underline{K}'_{11})_e = 10^3 \begin{bmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$$

$$\text{Barra f: } \begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases} \quad (\underline{K}'_{22})_f = (\underline{K}'_{11})_f = 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (\underline{K}'_{12})_f = (\underline{K}'_{21})_f = 10^3 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Barra b: } \begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases} \quad (\underline{K}'_{22})_b = 10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Barra d: } \begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \sin \alpha = -3/5 \end{cases} \quad (\underline{K}'_{11})_d = 10^3 \begin{bmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$$

$$\text{Barra m: } \begin{cases} \cos \alpha = 4/5 \\ \sin \alpha = 3/5 \end{cases} \quad (\underline{K}')_m = 10^3 \begin{bmatrix} \frac{16}{25}K & \frac{12}{25}K \\ \frac{12}{25}K & \frac{9}{25}K \end{bmatrix}$$

$$\underline{K} - 10^3 \begin{bmatrix} \frac{41}{25} & -12/25 & -1 & 0 \\ -12/25 & 9/25 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{41+16K}{25} & \frac{12}{25}(K-1) \\ 0 & 0 & \frac{12}{25}(K-1) & \frac{34+9K}{25} \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} P'_{x4} \\ P'_{y4} \\ P'_{x5} \\ P'_{y5} \end{bmatrix}$	$= 10^3$	$\begin{bmatrix} 41/25 & -\frac{12}{25} & -1 & 0 \\ -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} + K & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{41+16K}{25} & \frac{12}{25}(K-1) \\ 0 & 0 & \frac{12}{25}(K-1) & \frac{34+9K}{25} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} d'_{x4} \\ d'_{y4} \\ d'_{x5} \\ d'_{y5} \end{bmatrix}$
--	----------	--	--

$$P'_{y4} = 10^3 \left\{ -\frac{12}{25} d'_{x4} + \left( \frac{9}{25} + K \right) d'_{y4} \right\} ; \quad \frac{P'_{y4}}{K} = \left\{ -\frac{12}{25} d'_{x4} + d'_{y4} \right\} ;$$

Cuando  $K \rightarrow \infty \rightarrow d'_{y4} = 0$

La fila y columna recuadradas se pueden no tener en cuenta.

Para la resolución del problema se tienen en cuenta los estados inicial y modal de la figura E4.5e.

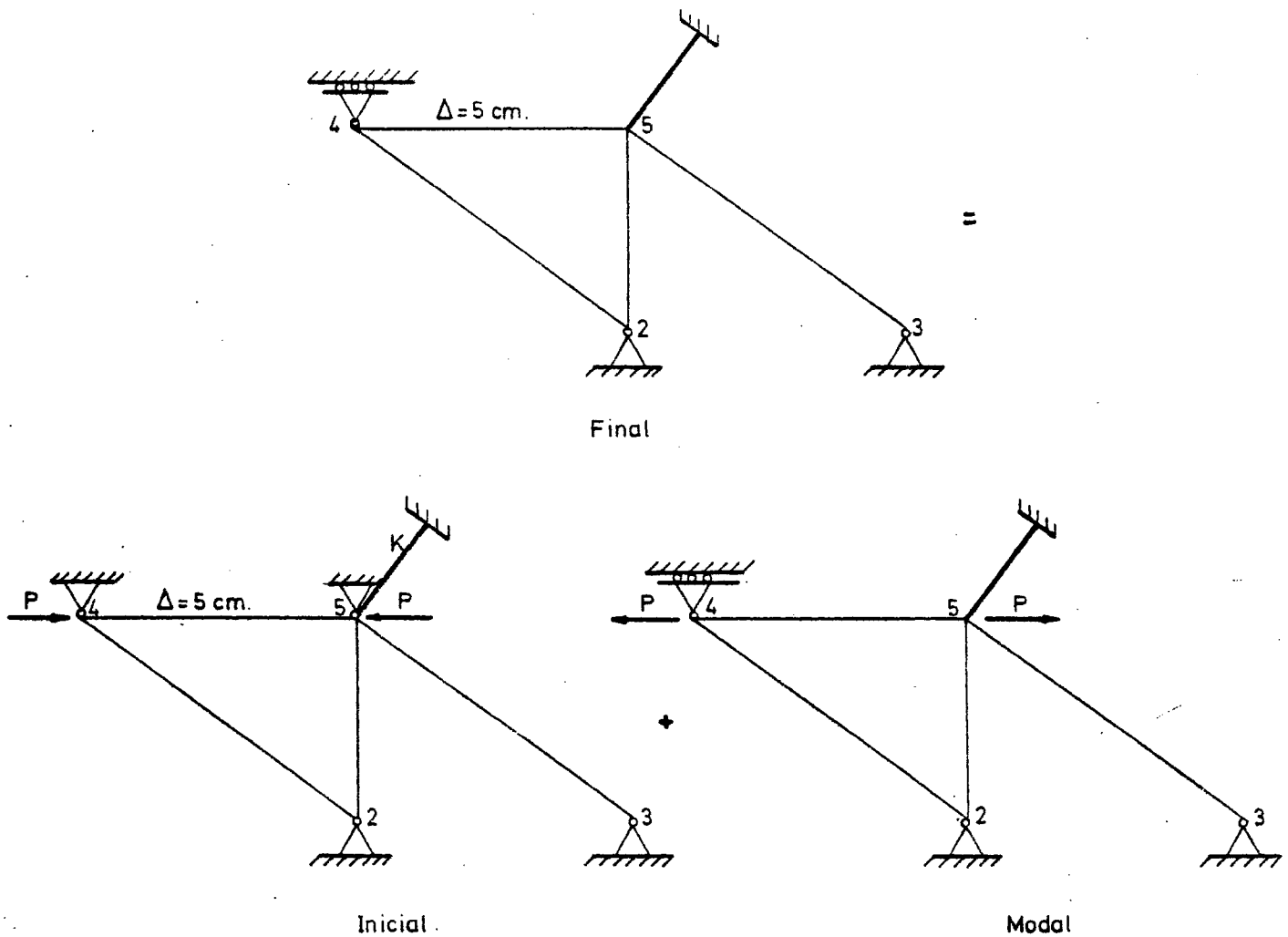


Fig. E4.5e

Si la barra 4-5 aumenta 5 cm:  $EA \frac{\delta}{L} = \underline{P}$ ;

$$\underline{P} = \frac{EA}{L} \cdot 5 = 10^3 \frac{\text{t}}{\text{m}} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 50 \text{ ton.}$$

Luego, al aumentar la barra en 5 cm. de longitud, aparecen unas fuerzas de empotramiento que se indican en la figura E4.5e.

El estado modal de la figura E4.5e. proporciona el siguiente resultado:

$$\begin{bmatrix} -50 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} \frac{41}{25} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{41+16K}{25} & \frac{12}{25}(K-1) \\ 0 & \frac{12}{25}(K-1) & \frac{34+9K}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d'_{x4} \\ d'_{x5} \\ d'_{y5} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Delta}{10^3} = \frac{41}{25^3} (41+16K) (34+9K) - \frac{41}{25^3} \cdot 12^2 (K-1)^2 - \frac{34+9K}{25} =$$

$$= \frac{41}{25^3} \{ 1394 + 144K^2 + 931K - 144K^2 + 288K - 144 \} - \frac{1}{25^3} (21250 + 5625K) =$$

$$= \frac{1}{25^3} \{ 49241K + 51250 - 5625K - 21250 \} \rightarrow$$

$$\Delta = \frac{10^3}{25^3} \{ 43616K + 30000 \}$$

$$\alpha_{\Delta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{25^2} \{ 1201K + 1250 \} & \frac{34+9K}{25} & -\frac{12}{25}(K-1) \\ \frac{34+9K}{25} & \frac{41}{25^2} \{ 34+9K \} & -\frac{492}{25^2}(K-1) \\ -\frac{12(K-1)}{25} & -\frac{492}{25^2}(K-1) & \frac{1}{25^2} (656K + 1025) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d'_{x4} \\ d'_{x5} \\ d'_{y5} \end{bmatrix} = \frac{25^3}{10^3 \{ 43616K + 30000 \}} \alpha_{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} -50 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta que  $K \rightarrow \infty$ , se tiene:

$$d'_{x4} = \frac{25^3}{43616K + 30000} \left\{ (-50) \frac{1201K + 1250}{25^2} + 50 \cdot 25 \cdot \frac{34+9K}{25^2} \right\} \frac{1}{10^3} = -28 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

$$d'_{x5} = \frac{25^3}{43616K + 30000} \left\{ (-50) \cdot 25 \cdot \frac{34+9K}{25^2} + 50 \cdot \frac{41(34+9)}{25^2} \right\} 10^{-3} = 4,13 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

$$d'_{y5} = \frac{25^3}{43616K + 30000} \left\{ (-50) (-12) \frac{K-1}{25^2} \cdot 25 - 50 \cdot \frac{492(K-1)}{25^2} \right\} 10^{-3} = -5,5 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

DESPLAZAMIENTOS EN LOS NUDOS

$$d'_{x4} = -2,8 \text{ cm}; \quad d'_{y4} = 0, \quad d'_{x5} = 0,41 \text{ cm}; \quad d'_{y5} = -0,55 \text{ cm.}$$

Cálculo de los esfuerzos en las barras:

$$(P_1)_f = (k_{11})_f d_1 + (k_{21})_f d_2 = (K_{11})_f T^T d'_1 + (K_{21})_f T^T d'_2 =$$

$$10^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -28.10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} - 10^3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,13.10^{-3} \\ -5,5.10^{-3} \end{bmatrix} = -28 - 4,13 = \underline{-32,13 \text{ t}}$$

$$(P_1)_e = (K_{11})_e T^T d'_1 = 10^3 \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -28.10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{-22,4 \text{ t}}$$

$$(P_2)_b = (K_{22})_b T^T d'_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,13.10^{-3} \\ -5,5.10^{-3} \end{bmatrix} = \underline{-5,50 \text{ t}}$$

$$(P_1)_d = (K_{11})_d T^T d'_1 = 10^3 \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,13.10^{-3} \\ -5,5.10^{-3} \end{bmatrix} = \underline{6,6 \text{ t}}$$

Se tienen así los esfuerzos en las barras que trabajan, pero en la barra f hay que tener en cuenta el estado inicial que es una compresión de 50 t.

Luego:

$$50 - 32,13 = 17,87 \text{ t. de compresión.}$$

Llamando positiva a la tracción y negativa a la compresión se tiene el resultado de la figura E4.5f.

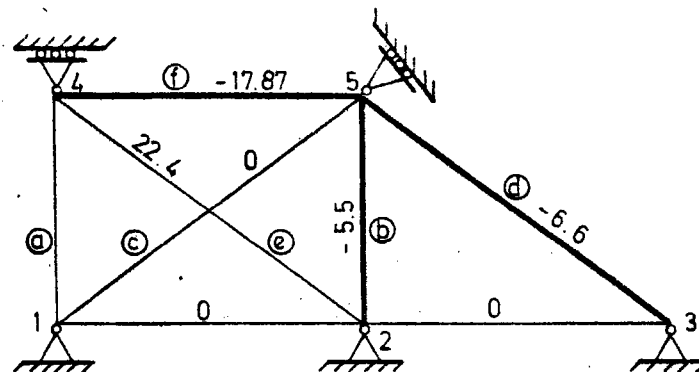


Fig. E4.5f.- Esfuerzos en las barras

La obtención de las reacciones por técnicas matriciales  
(en ejes generales  $x', y'$ , y con resultados en toneladas)  
es:

$$\underline{R}_2 = \underline{p}_{2e}' + \underline{p}_{1b}' = (\underline{K}_{21}') e \cdot \underline{d}_4' + (\underline{K}_{12}') b \cdot \underline{d}_5' = -10^3 \begin{bmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,8 \cdot 10^{-2} \\ 0 \end{bmatrix} -$$

$$-10^3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,41 \cdot 10^{-2} \\ -0,55 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} = -10 \begin{bmatrix} -1,792 \\ 1,344 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 0 \\ -0,55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17,92 \\ -7,94 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_3 = \underline{p}_{2d}' = (\underline{K}_{21}') d \cdot \underline{d}_5' = -10 \begin{bmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,41 \\ -0,55 \end{bmatrix} = -10 \begin{bmatrix} 0,5264 \\ -0,3948 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5,264 \\ 3,948 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_4^{S. \text{ modal}} = \underline{p}_{1e}' + \underline{p}_{1f}' = \{ (\underline{K}_{11}') e + (\underline{K}_{11}') f \} \underline{d}_4' + (\underline{K}_{12}') f \cdot \underline{d}_5' = 10 \begin{bmatrix} \frac{41}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,8 \\ 0 \end{bmatrix} +$$

$$+10 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,41 \\ -0,55 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} -4,592 \\ 1,344 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} -0,41 \\ 0 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} -5 \\ 1,344 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ 13,44 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta la solución inicial:

$$\underline{R}_4 = 50 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -50 \\ 13,44 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 13,44 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R}_5^{S. \text{ modal}} = \underline{p}_{2f}' + \underline{p}_{2b}' + \underline{p}_{1d}' = (\underline{K}_{21}') f \cdot \underline{d}_4' + \{ (\underline{K}_{22}') f + (\underline{K}_{22}') b + (\underline{K}_{11}') d \} \underline{d}_5' =$$

$$10 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,8 \\ 0 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} \frac{41}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{34}{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,41 \\ -0,55 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 3,7364 \\ -0,9448 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 37,36 \\ -9,448 \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta la solución inicial:

$$\underline{R}_5 = 50 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 37,36 \\ -9,448 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12,64 \\ -9,45 \end{bmatrix}$$

Al operar con ejes de nudo esta  $R_5$  ya sale en dichos ejes, lo cual es mucho más conveniente.

En la figura E4.5g. se representan las reacciones y los esfuerzos en las barras:

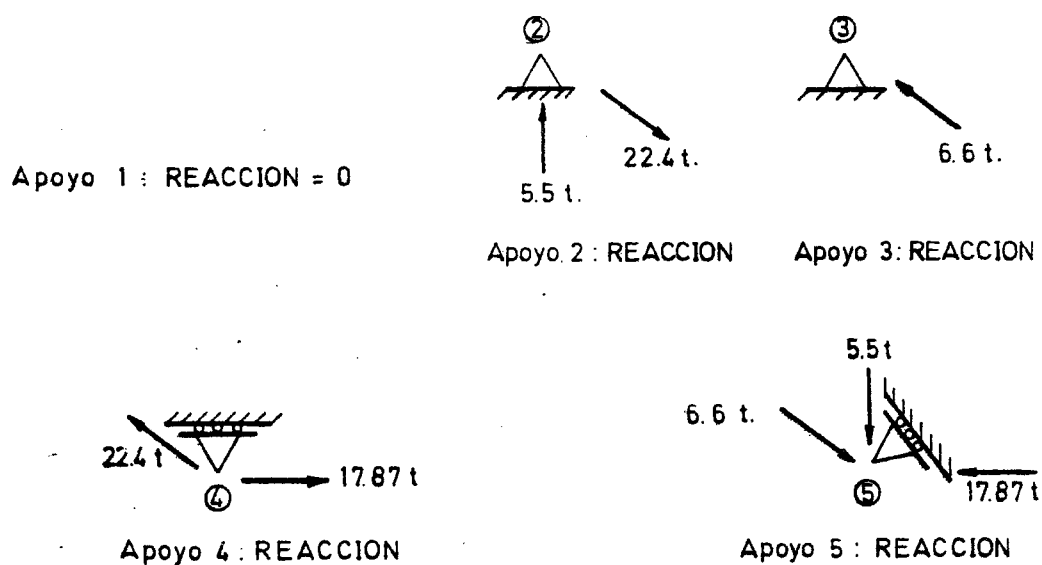


Fig. E 4.5 g



Ejercicio 4.6.

En la estructura entramado plano de la figura E4.6a., las barras 1A y A2 son de hormigón armado de módulo de elasticidad de  $200 \text{ t.cm}^{-2}$ , área  $1 \text{ m}^2$  e inercia  $1 \text{ m}^4$ . La barra 2-3 es un tirante sin rigidez a flexión; de área  $10 \text{ cm}^2$  y módulo de elasticidad de  $2.000 \text{ t.cm}^{-2}$ .

Se pide:

- 1) Matriz de rigidez de la pieza 1A2.
- 2) Desplazamiento del nudo 2.
- 3) Desplazamiento del nudo A.
- 4) Esfuerzos del tirante.

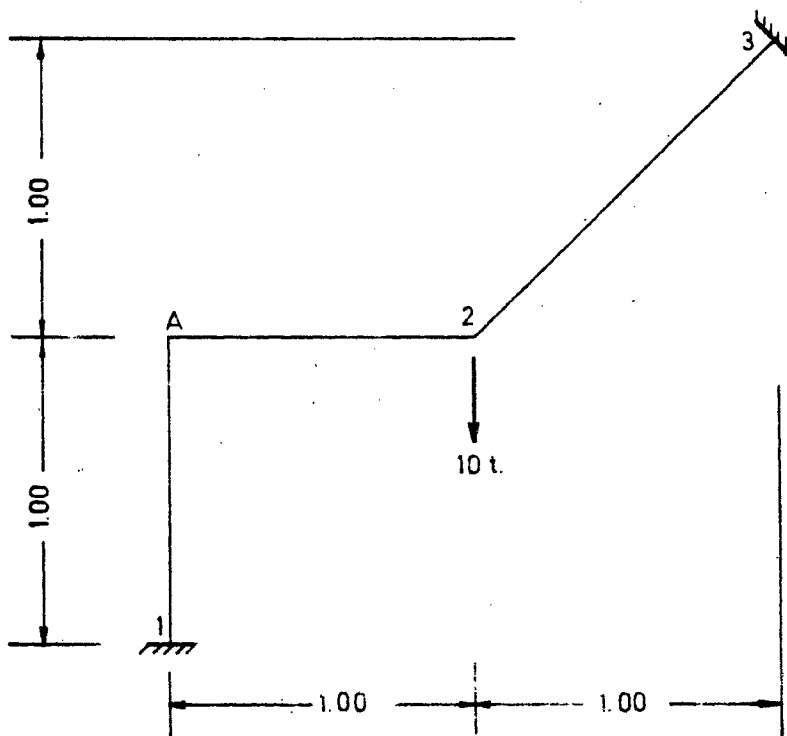


Fig E4 6a

a) La matriz de la barra 1A2 se puede determinar siguiendo varios procedimientos (condensación estática, teorema de Castigliano, etc.). Aquí se indica el método del centro elástico.

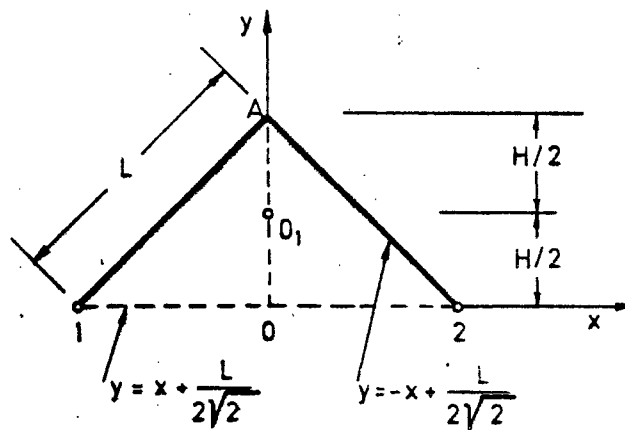


Fig. E4.6b

Teniendo en cuenta la figura E4.6b., las coordenadas del centro elástico  $O_1$  son:

$$x=0 ; \quad y = \frac{\int_{-\frac{L}{\sqrt{2}}}^{\frac{L}{\sqrt{2}}} y \cdot \frac{dx}{I_0}}{\int_{-\frac{L}{\sqrt{2}}}^{\frac{L}{\sqrt{2}}} \frac{dx}{I_0}} = \frac{\int_{-\frac{L}{\sqrt{2}}}^{\frac{L}{\sqrt{2}}} y \, dx}{\int_{-\frac{L}{\sqrt{2}}}^{\frac{L}{\sqrt{2}}} dx} = \frac{L^2/2}{L\sqrt{2}} = \frac{L}{2\sqrt{2}}$$

El centro elástico está situado en el punto medio de la altura del triángulo.

Se adopta como origen de coordenadas el centro elástico.

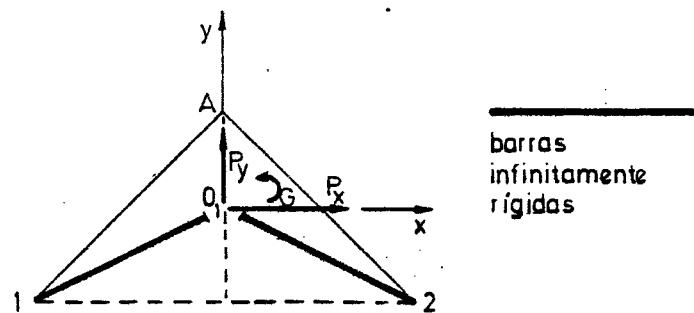


Fig. E4.6 c

Teniendo en cuenta la figura E4.6c., se aplica una fuerza  $P_x$  en el centro elástico, el movimiento que se produce en él es:

$$d_x = P_x \left\{ \int y^2 \frac{dx_1}{EI_0} + \int \frac{dx_1}{E\Omega_0} \right\}$$

$$\text{con } \Omega_0 = \Omega \cos \theta = \Omega \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$I_0 = I \cos \theta = I \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Las integrales se obtienen como sigue:

$$\frac{1}{EI_0} \int_{-L/2}^0 \left(x_1 + \frac{L}{2}\right)^2 dx_1 + \frac{1}{EI_0} \int_0^{L/2} \left(-x_1 + \frac{L}{2}\right)^2 dx + \int_{L/2}^0 \frac{dx}{E\Omega_0} =$$

$$\frac{1}{EI_0} \frac{L^3}{12\sqrt{2}} + \frac{1}{E\Omega_0} \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Por lo tanto

$$P_x = \frac{2\sqrt{2} E}{L \left\{ \frac{1}{6I_0} + \frac{1}{\Omega_0} \right\}} dx = k_{11} dx$$

Análogamente con una carga  $p_y$ , se produce un movimiento vertical  $d_y$ , de valor:

$$d_y = p_y \left\{ \int \frac{x_1^2 dx_1}{EI_0} + \int \frac{dx_1}{E\Omega_0} \right\}$$

En este caso se tiene:

$$\frac{1}{EI_0} \int \frac{L}{\sqrt{2}} x_1^2 dx_1 + \frac{1}{E\Omega_0} \int \frac{L}{\sqrt{2}} dx_1 = \frac{L}{E} \left\{ \frac{L^2}{3I_0} + \frac{2}{\Omega_0} \right\}$$

Por lo tanto 
$$p_y = \frac{E\sqrt{2}}{L \left( \frac{L^2}{3I_0} + \frac{2}{\Omega_0} \right)} d_y = k_{22} d_y$$

Para un momento  $G_z$  en el centro elástico, el giro que se produce en él, es:

$$\theta_z = G_z \int \frac{dx}{EI_0} = G_z \int \frac{L}{\sqrt{2}} \frac{dx}{EI_0} = G_z \frac{2L}{\sqrt{2}EI_0}$$

$$\text{es decir } G_z = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{EI_0}{L} \theta_z = k_{33} \theta_z$$

La matriz de rigidez, del centro elástico es:

$$\underline{s} = \underline{K} \underline{e}$$

$$\text{con } \underline{s} = (p_x, p_y, G_z)^T, \underline{e} = (d_x, d_y, \theta_z)^T$$

$$\underline{K} = \text{diag.}(f_{11}, f_{22}, f_{33}).$$

La matriz de rigidez general de la estructura referida al punto  $0_1$ , se calcula considerando la matriz de equilibrio  $\underline{H} = \underline{I}_3$ , (matriz unidad de dimensión 3):

$$\underline{K}_{22} = \underline{K}, \quad \underline{k}_{12} = \underline{k}_{21}^T = -\underline{H} \underline{K} = -\underline{K}, \quad \underline{K}_{11} = \underline{H}^T \underline{K} \underline{H} = \underline{K}$$

Estas matrices, se modifican al cambiar los ejes del nudo  $0_1$  a los nudos 1 y 2, siendo las matrices de transformación estáticas:

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices nuevas son  $\underline{k}'_{ij} = \underline{T}_i \underline{k}_{ij} \underline{T}_j^T$  ( $i, j=1, 2$ ).  
Resultando, referido a los ejes (x,y)

$$\underline{k}'_{11} = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} f_{11} \\ 0 & f_{22} & \frac{\sqrt{2}}{2} f_{22} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} f_{11} & \frac{\sqrt{2}}{2} f_{22} & \frac{1}{8} f_{11} + \frac{1}{2} f_{22} + f_{33} \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}'_{12} = \underline{k}'_{21} = - \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} f_{11} \\ 0 & f_{22} & \frac{\sqrt{2}}{2} f_{22} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} f_{11} & \frac{\sqrt{2}}{2} f_{22} & \frac{1}{8} f_{11} - \frac{1}{2} f_{22} + f_{33} \end{bmatrix}$$

$$\underline{k}'_{22} = \begin{bmatrix} f_{11} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{4} f_{11} \\ 0 & f_{22} & \frac{\sqrt{2}}{2} f_{22} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} f_{11} & \frac{\sqrt{2}}{2} f_{22} & \frac{1}{8} f_{11} + \frac{1}{2} f_{22} + f_{33} \end{bmatrix}$$

En este caso, se tiene  $f_{11} = \frac{24}{7} \cdot 10^6$ ,  $f_{22} = \frac{6}{7} \cdot 10^6$  y  $f_{33} = 1 \cdot 10^6$  y la matriz de rigidez queda:

$$k^1 = \begin{bmatrix} \frac{24}{7} & 0 & -\frac{6\sqrt{2}}{7} & -\frac{24}{7} & 0 & \frac{6\sqrt{2}}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{3\sqrt{2}}{7} & 0 & -\frac{6}{7} & +\frac{3\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{6\sqrt{2}}{7} & \frac{3\sqrt{2}}{7} & \frac{13}{7} & \frac{6\sqrt{2}}{7} & -\frac{3\sqrt{2}}{7} & -1 \\ -\frac{24}{7} & 0 & \frac{6\sqrt{2}}{7} & \frac{24}{7} & 0 & -\frac{6\sqrt{2}}{7} \\ 0 & -\frac{6}{7} & -\frac{3\sqrt{2}}{7} & 0 & \frac{6}{7} & -\frac{3\sqrt{2}}{7} \\ \frac{6\sqrt{2}}{7} & \frac{3\sqrt{2}}{7} & -1 & -\frac{6\sqrt{2}}{7} & -\frac{3\sqrt{2}}{7} & \frac{13}{7} \end{bmatrix}$$

2) Movimientos del nudo 2.

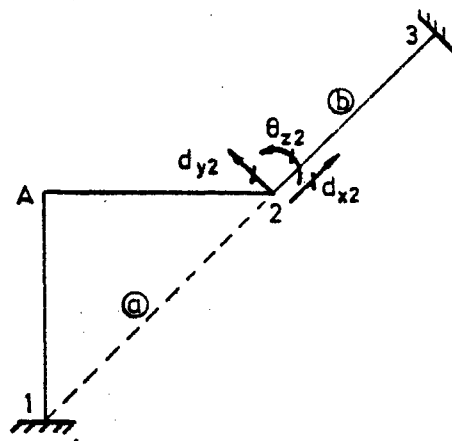


Fig. E4.6 d

La matriz de rigidez de la barra 2-3, corresponde a una barra de entramado con ausencia de rigidez de flexión, es decir  $I=0$

Solo se necesita conocer

$$(k_{11})_b = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$10^6 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La ecuación resultante en desplazamientos es:

$$\{(k_{11})_b + (k_{22})_a\} \underline{d}_2 = \underline{p}_2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{24}{7} + \sqrt{2} & 0 & -\frac{6\sqrt{2}}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & -\frac{3\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{6\sqrt{2}}{7} & -\frac{3\sqrt{2}}{7} & \frac{13}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema, resulta

$$d'_{x2} = -2,965 \cdot 10^{-6} \text{ metros}$$

$$d'_{y2} = -12,50 \cdot 10^{-6} \text{ metros}$$

$$\theta_{z2} = -6,02 \cdot 10^{-6} \text{ radianes}$$

### 3) Movimientos del nudo A.

Los esfuerzos en el nudo 2 son:

$$(p'_2)_a = (k'_{22})_a d'_2 = 10^6 \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} \frac{24}{7} & 0 & -\frac{6\sqrt{2}}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & -\frac{3\sqrt{2}}{7} \\ -\frac{6\sqrt{2}}{7} & -\frac{3\sqrt{2}}{7} & \frac{13}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,965 \\ -12,50 \\ -6,02 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -2,875 \\ -7,06 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Estos esfuerzos trasladados al punto A resultan:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2,19 \\ 12,14 \end{bmatrix}$$

Valores que se representan en la figura E4.6e.

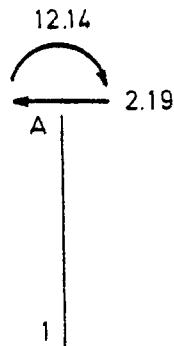


Fig E 4.6 e

$$d_{\psi} = \frac{M dx}{EI} ; \quad Q = \int_0^1 (12,14 - 2,19x) \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} (12,14 - \frac{2,19}{2}) = \frac{11,045}{EI}$$

$$\theta = 5,52 \cdot 10^{-6} \text{ rd.}$$

$$df = \frac{M x dx}{EI} ; \quad f = \int_0^1 (12,14x - 2,19x^2) \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI} (\frac{12,14}{2} - \frac{2,19}{3}) = \frac{5,34}{EI}$$

$$f = 2,67 \cdot 10^{-6} \text{ m.}$$

$$d_{xA} = 1,88 \cdot 10^{-6} \text{ m;}$$

$$d_{yA} = -1,88 \cdot 10^{-6} \text{ m;}$$

$$\theta_{zA} = -5,52 \cdot 10^{-6} \text{ rd.}$$

4) Esfuerzo en el tirante;

$$(P_2^I)_b = (k_{22}^I)_b d_2^I \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} P_{x2b}^I \\ P_{y2b}^I \\ G_{z2b}^I \end{bmatrix} = 10^6 \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2,965 \\ - \\ - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4,19 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este resultado está en ejes generales. En ejes locales es  $p_{x2b} = 4,19 \text{ t.} + 4,19$ .

Esfuerzo en el tirante: tracción + 4,19 ton.



Ejercicio E4.7.

Obtener mediante la utilización de un programa de cálculo matricial los esfuerzos en todas las barras de la figura E4.7a., siendo  $\frac{L}{E\Omega} = \text{Cte.}$

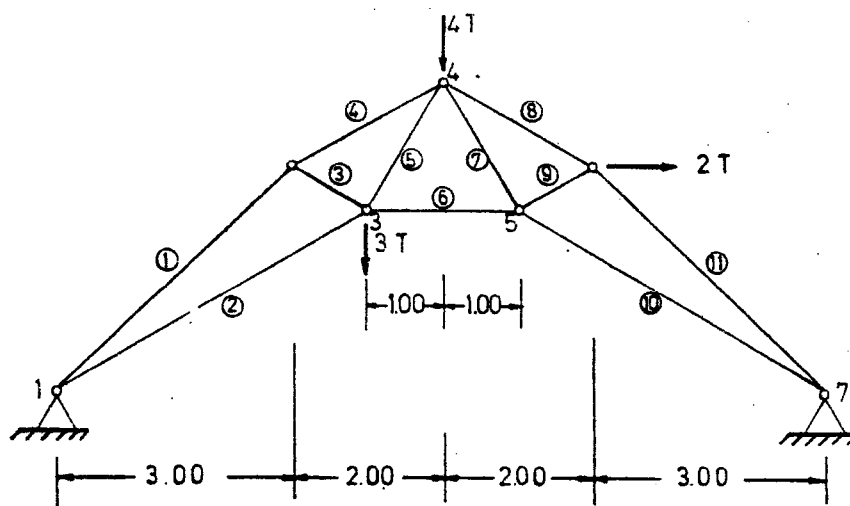


Fig. E4. 1a .

NOTA.- Las especificaciones de acceso al ordenador y características de entrada de datos para los ejercicios E4.7, E4.8. y E4.9. se indican en el apendice a estos ejercicios.

DATOS

NUMERO DE NUDOS : 7  
NUMERO DE BARRAS : 11  
NUMERO DE NUDOS CARGADOS: 3  
NUMERO DE APOYOS : 2  
MODULO DE ELASTICIDAD : 20000000.

COORDENADAS NODALES

NUDO	X	Y
1	.00	.00
2	3.00	3.00
3	4.00	1.50
4	5.00	3.50
5	6.00	1.50
6	7.00	3.00
7	10.00	.00

CONEXION Y PROPIEDADES DE LAS BARRAS

BARRA	PRIMER NUDO	SEGUNDO NUDO	AREA
1	1	2	.00212
2	1	3	.00214
3	2	3	.00090
4	2	4	.00103
5	3	4	.00112
6	3	5	.00100
7	4	5	.00112
8	4	6	.00103
9	5	6	.00090
10	5	7	.00214
11	6	7	.00212

CARGAS NODALES

NUDO	PX	PY
3	.00	-3.00
4	.00	-4.00
6	2.00	.00

CONDICIONES DE CONTORNO

CODIGO		VALORES PREESTABLECIDOS		
(0:PREESTABLECIDO,1:LIBRE)				
NUDO	U	V	U	V
1	0	0	.0000	.0000
7	0	0	.0000	.0000

RESULTADOS

DESPLAZAMIENTOS NODALES

NUDO	U	V
1	.0000	.0000
2	.0005	-.0010
3	.0003	-.0013
4	.0001	-.0011
5	.0002	-.0007
6	.0001	-.0003
7	.0000	.0000

REACCIONES NODALES

NUDO	PX	PY
1	4.2588	3.2000
2	-.0000	-.0000
3	-.0000	-3.0000
4	.0000	-4.0000
5	-.0000	.0000
6	2.0000	.0000
7	-6.2588	3.8000

ESFUERZOS EN BARRAS

BARRA	ESFUERZO AXIL
1	-3.6270
2	-1.8094
3	1.9815
4	-3.7766
5	.8005
6	-.9530
7	-3.7994
8	-1.6562
9	2.3112
10	-4.2017
11	-3.2876

Ejercicio E4.8.

En la estructura de la figura E4.8a. el nudo 4 sufre un descenso de 1 cm. y un giro de  $0,5 \cdot 10^{-2}$  radianes en sentido positivo, y la barra 2-3 sufre un incremento de temperatura de  $40^{\circ}\text{C}$ . Obtener mediante la utilización de un programa de cálculo matricial los siguientes esfuerzos y reacciones.

a) Reacciones en 1.

b) Esfuerzos en A (punto medio del dintel 3-5).

$E = 2 \cdot 10^6 \text{ ton/m}^2$ .

$\alpha = 10^{-5} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

Sección de todas las barras:  $0,30 \times 0,40 \text{ m}^2$ .

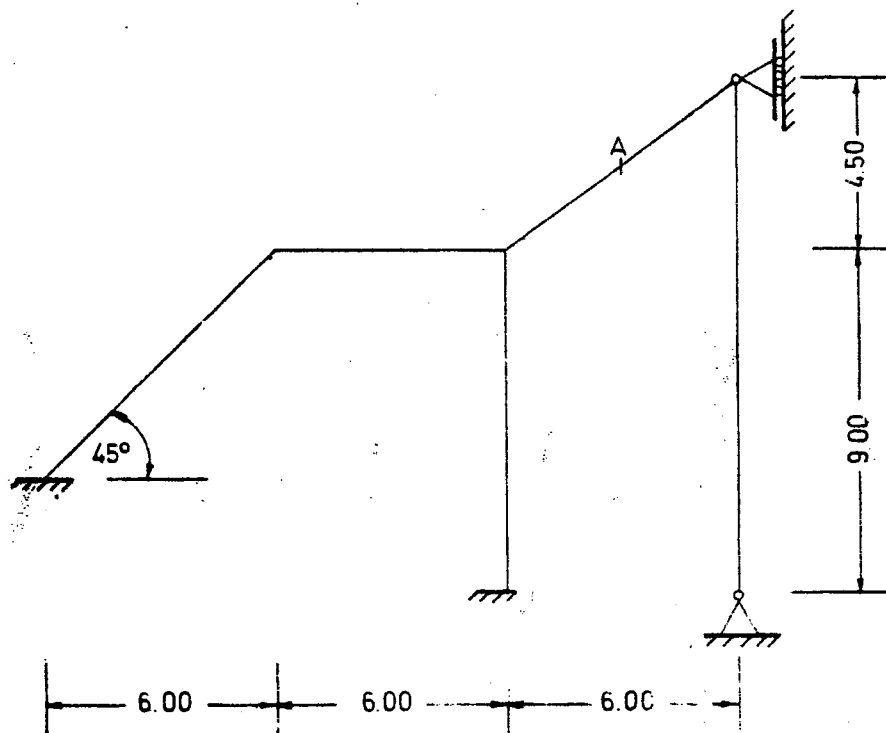


Fig. E 4.8 a

Se considerará el punto A como un nudo más, el 5 de la figura E4.8b.

$$\Delta_{2-3} = \alpha L \Delta t = 10^{-5} \cdot 6 \cdot 40 = 24 \cdot 10^{-4}$$

$$N_{eq} = 24 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{E\Omega}{L} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-2}}{6} = 8 \text{ t.}$$

El estado a resolver es el de la figura E4.8b.

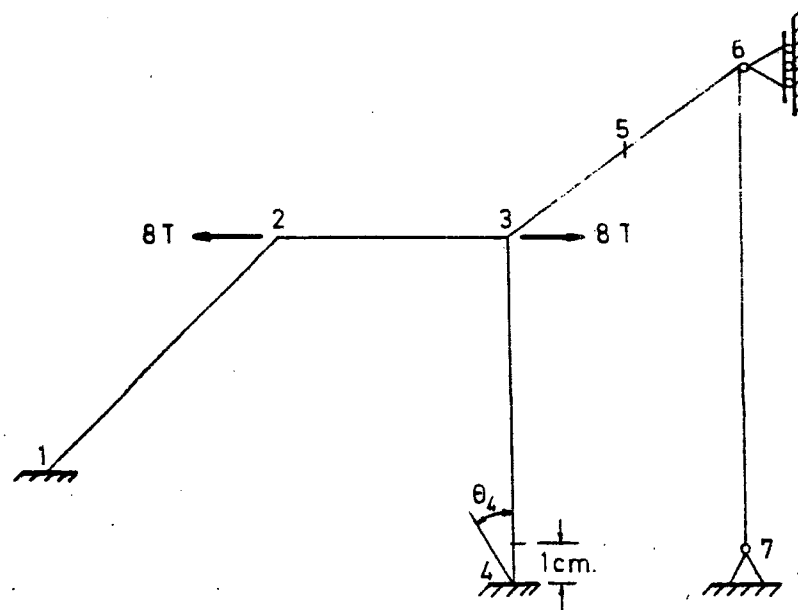


Fig.E4.8 b

#### DATOS

NUMERO DE NUDOS	:	7
NUMERO DE BARRAS	:	6
NUMERO DE NUDOS CARGADOS:		2
NUMERO DE APOYOS	:	4
MODULO DE ELASTICIDAD	:	2000000.

#### COORDENADAS NODALES

NUDO	X	Y
1	.00	.00
2	6.00	6.00
3	12.00	6.00

4	12.00	-3.00
5	15.00	8.25
6	18.00	10.50
7	18.00	-3.00

# CONEXION Y PROPIEDADES DE LAS BARRAS

BARRA	PRIMER NUDO	SEGUNDO NUDO	AREA	M. DE INERCIA
1	1	2	.12000	.00160
2	2	3	.12000	.00160
3	3	4	.12000	.00160
4	3	5	.12000	.00160
5	5	6	.12000	.00160
6	6	7	.12000	.00160

# CARGAS NODALES

NUDO	PX	PY	MZ
2	-8.00	.00	.00
3	8.00	.00	.00

# CONDICIONES DE CONTORNO

NUDO	CODIGO			VALORES PREESTABLECIDOS		
	U	V	RZ	U	V	RZ
1	0	0	0	.0000	.0000	.0000
4	0	0	0	.0000	-.0100	.0050
6	0	1	1	.0000	.0000	.0000
7	0	0	1	.0000	.0000	.0000

# RESULTADOS

## DESPLAZAMIENTOS NODALES

NUDO	U	V	RZ
1	.0000	.0000	.0000
2	.0070	-.0069	-.0010
3	.0072	-.0099	-.0006
4	.0000	-.0100	.0050
5	.0050	-.0070	.0021
6	.0000	-.0001	.0019
7	.0000	.0000	-.0010

# REACCIONES NODALES

NUDO	PX	PY	MZ
1	-.8345	-.3259	1.8925
2	-8.0000	-.0000	.0000
3	8.0000	.0000	.0000
4	-1.4150	-2.1857	8.3697
5	-.0000	-.0000	-.0000
6	2.3516	.0000	-.0000
7	-.1020	2.5116	.0000

# ESFUERZOS EN BARRAS

BARRA	NUDO	FX	FY	MZ
1	1	-.8205	.3597	1.8925
	2	.8205	-.3597	1.1594
2	2	-8.8345	-.3259	-1.1594
	3	8.8345	.3259	-.7960
3	3	-2.1857	1.4150	4.3652
	4	2.1857	-1.4150	8.3697
4	3	-3.3066	-.6596	-3.5693
	5	3.3066	.6596	1.0959
5	5	-3.3066	-.6596	-1.0959
	6	3.3066	.6596	-1.3775
6	6	2.5116	.1020	1.3775
	7	-2.5116	-.1020	.0000

Ejercicio E4.9.

La estructura emparrillado plano de la figura E4.9a. está sometida a una carga vertical uniforme de 2 t/m. sobre la barra 3-5. Obtener los esfuerzos en todas las barras, mediante la utilización de un programa de cálculo matricial.

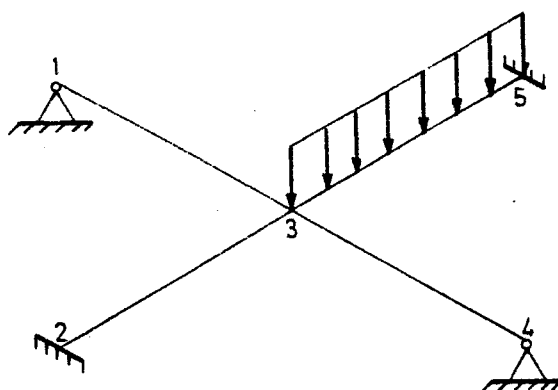


Fig. E4.9a

Todas las barras tienen igual luz = 6 m. y características elásticas:

$$E = 3 \cdot 10^6 \text{ t.m}^{-2}$$

$$I = 0,0050 \text{ m}^4 \text{ (inercia a flexión)}$$

$$J = 0,0030 \text{ m}^4 \text{ (inercia a torsión)}$$

$$\nu = 0,20$$

Los nudos 2 y 5 están totalmente empotrados y el nudo 1 articulado a flexión (el giro a torsión y movimiento vertical están impedidos), y el nudo 4 tiene impedidos el giro a flexión y el movimiento vertical.



Dado que el programa utilizado solo admite la posibilidad de cargas en los nudos, es preciso realizar la descomposición en estados de la figura E4.9b.

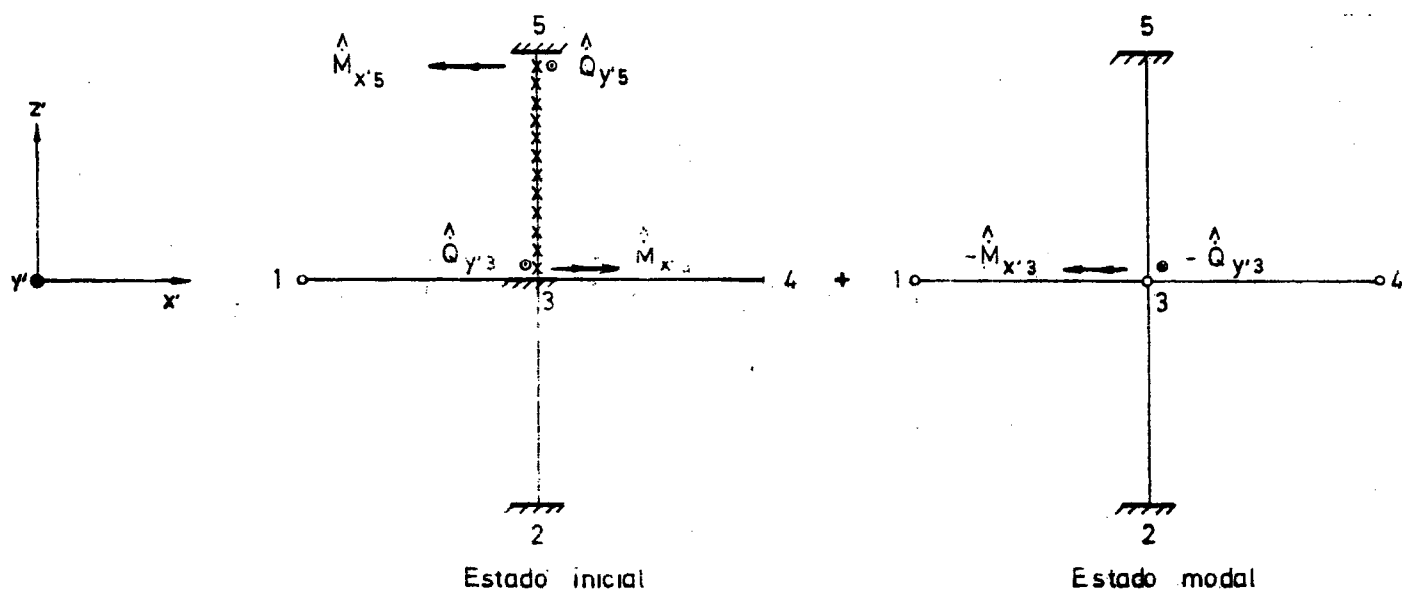


Fig E4.9 b

$$\hat{M}_{x'3} = -\hat{M}_{x'5} = \frac{PL^2}{12} = \frac{2.6^2}{12} = 6 \text{ m.t.}$$

$$\hat{Q}_{y'3} = \hat{Q}_{y'5} = -\frac{PL}{2} = -\frac{2.6}{2} = -6 \text{ t.}$$

Resultando:

Solución final = solución inicial + solución modal.  
La solución inicial es inmediata y sólo afecta a la barra 3-5.  
La solución modal se obtiene mediante el programa de cálculo matricial.

DATOS

NUMERO DE NUDOS	:	5
NUMERO DE BARRAS	:	4
NUMERO DE NUDOS CARGADOS:		1
NUMERO DE APOYOS	:	4
MODULO DE ELASTICIDAD	:	3000000.
COEFICIENTE DE POISSON	:	.200

# COORDENADAS NODALES

NUDO	X	Z
1	.00	.00
2	6.00	-6.00
3	6.00	.00
4	12.00	.00
5	6.00	6.00

# CONEXION Y PROPIEDADES DE LAS BARRAS

BARRA	PRIMER NUDO	SEGUNDO NUDO	IN. A FLEXION	IN. A TORSION
1	1	3	.00500	.00300
2	2	3	.00500	.00300
3	3	4	.00500	.00300
4	3	5	.00500	.00300

# CARGAS NODALES

NUDO	MX	PY	MZ
3	-6.00	6.00	.00

# CONDICIONES DE CONTORNO

CODIGO			VALORES PREESTABLECIDOS			
(0:PREESTABLECIDO, 1:LIBRE)						
NUDO	RX	V	RZ	RX	V	RZ
1	0	0	0	.0000	.0000	.0000
2	0	0	0	.0000	.0000	.0000
4	1	0	0	.0000	.0000	.0000
5	0	0	0	.0000	.0000	.0000

# RESULTADOS

## DESPLAZAMIENTOS NODALES

NUDO	RX	V	RZ
1	.0000	.0000	.0006
2	.0000	.0000	.0000
3	-.0003	.0023	-.0002
4	-.0003	.0000	.0000
5	.0000	.0000	.0000

# REACCIONES NODALES

NUDO	MX	PY	MZ
1	.1818	-.6667	-.0000
2	4.2597	-1.1775	.0952
3	-6.0000	6.0000	.0000
4	.0000	-1.5238	4.9524
5	-7.1688	-2.6320	.0952

# ESFUERZOS EN BARRAS

BARRA	NUDO	MX	FY	MZ
1	1	.1818	-.6667	-.0000
	3	-.1818	.6667	-4.0000
2	2	.0952	-1.1775	-4.2597
	3	-.0952	1.1775	-2.8052
3	3	.0000	1.5238	4.1905
	4	.0000	-1.5238	4.9524
4	3	-.0952	2.6320	8.6234
	5	.0952	-2.6320	7.1688

Los esfuerzos en la barra 3-5 serán, teniendo en cuenta la figura E4.9c.:

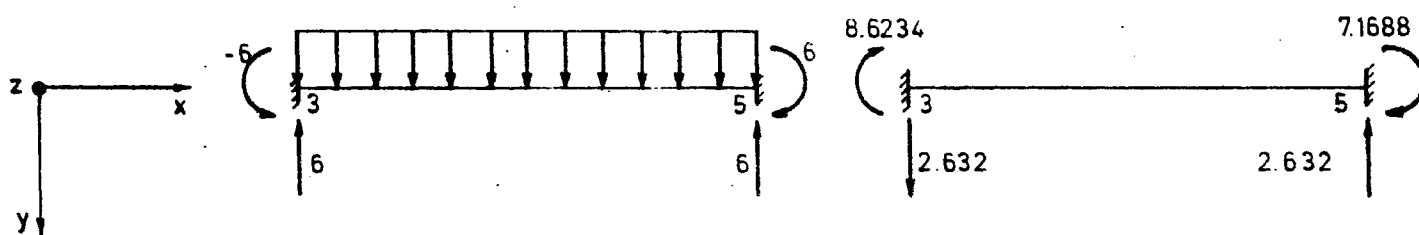


Fig. E4.9c

$$M_{z35} = -6 + 8.6234 = 2.6234 \text{ m.t.}$$

$$M_{z53} = 6 + 7.1688 = 13.1688$$

$$P_{y35} = -6 + 2.632 = -3.368 \text{ t.}$$

$$P_{y53} = -6 - 2.632 = -8.632$$

Todos los demás esfuerzos no varían.

APENDICE A LOS EJERCICIOS 4.6, 4.7, 4.8 SOBRE RESOLUCION DE ESTRUCTURAS MEDIANTE PROGRAMAS DE CALCULO MATRICIAL.

---

1. GENERALIDADES

Los programas disponibles en el Centro de Cálculo de la Universidad de Santander son:

CELOSIA (Versión 1) para la resolución de estructuras articuladas planas, con las siguientes limitaciones:

Máximo número de nudos: 100

Máximo número de barras: 100

Semiancho de banda máximo: 20

Máximo número de apoyos: 20

ENTRAMADO (Versión 1) para la resolución de estructuras reticuladas planas, siendo sus limitaciones:

Máximo número de nudos: 50

Máximo número de barras: 100

Máximo número de apoyos: 20

Semiancho de banda máximo: 21

EMPARRILLADO (Versión 1) para la resolución de emparrillados, con las mismas limitaciones - que el programa ENTRAMADO.

2. ACCESO AL ORDENADOR.

Para la ejecución de cualquiera de estos tres programas deberá disponerse la siguiente secuencia de tarjetas ( b  $\equiv$  espacio en blanco;  $\phi$   $\equiv$  cero).

TARJETA 1

JOBbCAMI.EST. $\phi$ 5

TARJETA 2

PASSWORDbESTRUCTURAS

TARJETA 3

DELETEDbCEL.DAT      si se trata de ejecutar el programa CELOSIA,

DELETEDbENT.DAT      si es en el caso del ENTRAMADO, o bien

DELETEDbEMP.DAT      si es en el EMPARRILLADO.

TARJETA 4

CREATE/1bCEL.DAT      o bien

CREATE/1bENT.DAT      o

CREATE/1bEMP.DAT      según sea el caso.

### GRUPO DE TARJETAS 5

En este lugar irá una serie de tarjetas con los da  
tos del problema, según estructura del apartado 3 del presen  
te apéndice.

#### TARJETA 6

)

Esta tarjeta sólo llevará un paréntesis derecho en su pri  
mera posición.

#### TARJETA 7

XbCELOSIA            6

XbENTRAMADO        6

XbEMPARRILLADO    en cada caso.

#### TARJETA 8

RENAMEb CEL.OUTb (nombre del problema)    o bien

RENAMEb ENT.OUTb (nombre del problema)    o

RENAMEb EMP.OUTb (nombre del problema)    según los casos

#### TARJETA 9

QPRINTb (nombre del problema)

#### TARJETA 10

DELETEDb (nombre del problema)

#### TARJETA 11

BYE

#### TARJETA 12

END

### 3. ENTRADA DE DATOS.

La entrada de datos se realiza con formato libre por lo que se puede emplear el número de decimales que se quiera, debiéndose separar simplemente los números entre sí por una co  
ma.

#### 3.1. DATOS DEL PROGRAMA CELOSIA. (Versión 1)

Deberá disponerse la siguiente secuencia de tarjetas:

- 1) TARJETA DE PARAMETROS BASICOS. Una tarjeta que contenga el número de nudos, número de barras, número de nudos car  
gados, número de apoyos, y el módulo de elasticidad del material.
- 2) TARJETAS DE COORDENADAS NODALES. Habrá tantas tarjetas co  
mo nudos y cada una de ellas contendrá el número del nudo,

su abscisa X y su ordenada Y.

- 3) TARJETAS DE CONEXION Y PROPIEDADES DE LAS BARRAS. Habrá tantas tarjetas como barras tenga la estructura, conteniendo cada una de ellas el número de la barra, el número de su primer nudo, el número de su segundo nudo, y el área de su sección recta.
- 4) TARJETAS DE CARGAS NODALES. Habrá que disponer tantas tarjetas como nudos cargados haya. Cada tarjeta contendrá el número del nudo, la componente x de la carga y la componente y, en ejes generales.
- 5) TARJETAS DE DATOS DE LOS APOYOS. Tantas tarjetas como apoyos existan. Cada tarjeta contendrá el número del nudo, el código de la condición de apoyo para la componente del desplazamiento en la dirección x, idem en la dirección y, y los valores preestablecidos de las componentes x e y del desplazamiento.

El código de condiciones de apoyos es el siguiente:

Código 1 indica que el desplazamiento correspondiente no está coaccionado, es decir, no es conocido.

Código 0 indica que el desplazamiento correspondiente está coaccionado y es conocido (Desplazamiento impuesto o apoyo).

En el caso del código 0, se dará el valor del movimiento (0 en el caso de apoyo fijo y el valor especificado si existe un asiento).

En el caso del código 1, cualquier valor del movimiento no se interpreta, ya que se supone desconocido. Se aconseja suponer el valor 0 al movimiento.

### 3.1.1.EJEMPLO

La secuencia de tarjetas de datos correspondientes a la estructura E4.7. sería (cada línea corresponde a una tarjeta):

7, 11, 3, 2, 20000000. (1)

---

1, 0., 0.

2, 3., 3.

3, 4., 1.5

4, 5., 3.5

5, 6., 1.5

6, 7., 3.

7, 10., 0.

---

1, 1, 2, .00212

2, 1, 3, .00214

3, 2, 3, .0009

4, 2, 4, .00103

5, 3, 4, .00112

6, 3, 5, .001

7, 4, 5, .00112

8, 4, 6, .00103

9, 5, 6, .0009

10. 5. 7. .00214

11, 6, 7, .00212

---

3, 0., -3.

4, 0., -4.

6, 2., 0.

---

1, 0, 0, 0., 0.

7, 0, 0, 0., 0.

(4)

(5)

### 3.2. DATOS DEL PROGRAMA ENTRAMADO (Versión 1)

La secuencia de tarjetas ha de ser la siguiente:

- 1) TARJETA DE PARAMETROS BASICOS. No varía.
- 2) TARJETAS DE COORDENADAS NODALES. No varía.
- 3) TARJETAS DE CONEXION Y PROPIEDADES DE LAS BARRAS. Es necesario dar el momento de inercia de cada barra. Habrá una tarjeta por cada barra, conteniendo el número de la barra, el número de su primer nudo, el del segundo nudo, el área de su sección recta, y el momento de inercia.
- 4) TARJETAS DE CARGAS NODALES. Para cada nudo cargado habrá una tarjeta que contenga el número del nudo, y las cargas  $P_x$ ,  $P_y$  y  $G$  correspondientes a ese nudo.
- 5) TARJETAS DE DATOS DE LOS APOYOS. Es igual que para el programa CELOSIA pero considerando tres grados de libertad en lugar de dos. Por cada apoyo habrá una tarjeta conteniendo el número del nudo, los códigos de las incognitas  $u$ ,  $v$  y  $\theta$ , y los valores preestablecidos, si procede, de las mismas. El sistema de códigos es similar al del programa CELOSIA.

#### 3.2.1. EJEMPLO

Para la estructura del ejercicio E4.8. la entrada de datos sería la siguiente:

7, 6, 2, 4, 2000000. (1)

---

1, 0., 0.

2, 6., 6.

3, 12., 6.

4, 12., -3. (2)

5, 15., 8.25

6, 18., 10.5

7, 18., -3.

---

1, 1, 2, .12, .0016

2, 2, 3, .12, .0016 (3)



3, 3, 4, .12, .0016	
4, 3, 5, .12, .0016	
5, 5, 6, .12, .0016	(3)
6, 6, 7, .12, .0016	

---

2, -8., 0., 0.	
3, 8., 0., 0.	(4)

---

1, 0, 0, 0, 0., 0., 0.	
4, 0, 0, 0, 0., -.01, .005	
6, 0, 1, 1, 0., 0., 0.	(5)
7, 0, 0, 1, 0., 0., 0.	

---

### 3.3. DATOS DEL PROGRAMA EMPARRILLADO. (Versión 1)

Las variaciones con respecto al programa ENTRAMADO son mínimas.

1) TARJETA DE PARAMETROS BASICOS. Es necesario dar el valor del coeficiente de Poisson. Esta tarjeta contendrá el número de nudos, número de barras, número de nudos cargados, -- número de apoyos, módulo de elasticidad, y coeficiente de Poisson.

2) TARJETAS DE COORDENADAS NODALES. No varía.

3) TARJETAS DE CONEXION Y PROPIEDADES DE LAS BARRAS. Habrá una tarjeta por cada barra conteniendo el número de la barra, el número de un primer nudo, el del segundo nudo, su momento de inercia  $I$ , y su inercia a la torsión  $J$ .

4) TARJETAS DE CARGAS NODALES. Una tarjeta por cada nudo cargado, que contenga el número del nudo, el valor de  $G_x$ , el de  $P_y$ , y el de  $M_z$ .

5) TARJETAS DE DATOS DE LOS APOYOS. Por cada apoyo habrá una tarjeta conteniendo el número del nudo, los códigos de las incógnitas  $\theta_x$ ,  $v_y$  y  $\theta_z$ , y los valores preestablecidos, si procede, de las mismas. El sistema de códigos es similar al del programa CELOSIA.

### 3.3.1. EJEMPLO

Para la estructura del ejercicio E4.9. la entrada de datos sería la siguiente:

5, 4, 1, 4, 3000000., .2 (1)

1, 0., 0.

2, 6., -6.

3, 6., 0.

4, 12., 0.

5, 6., 6. (2)

1, 1, 3, .005, .003

2, 3, 4, .005, .003

3, 2, 3, .005, .003

$$4, 3, 5, .005, .003 \quad (3)$$
$$3, -6., 6., 0. \quad (4)$$

1, 0, 0, 1, 0., 0., 0.

2, 0, 0, 0, 0., 0., 0.

4, 1, 0, 0, 0., 0., 0.

$$5, 0, 0, 0, 0., 0., 0. \quad (5)$$

Ejercicio E5.1.

Determinar los movimientos en todos los nudos de la estructura entramado plano de la figura E5.1a.

Todas las barras son de hormigón con  $E=3 \cdot 10^6 \text{ t.m}^{-2}$  y sección  $0,50 \cdot 0,20 \text{ m}$ .

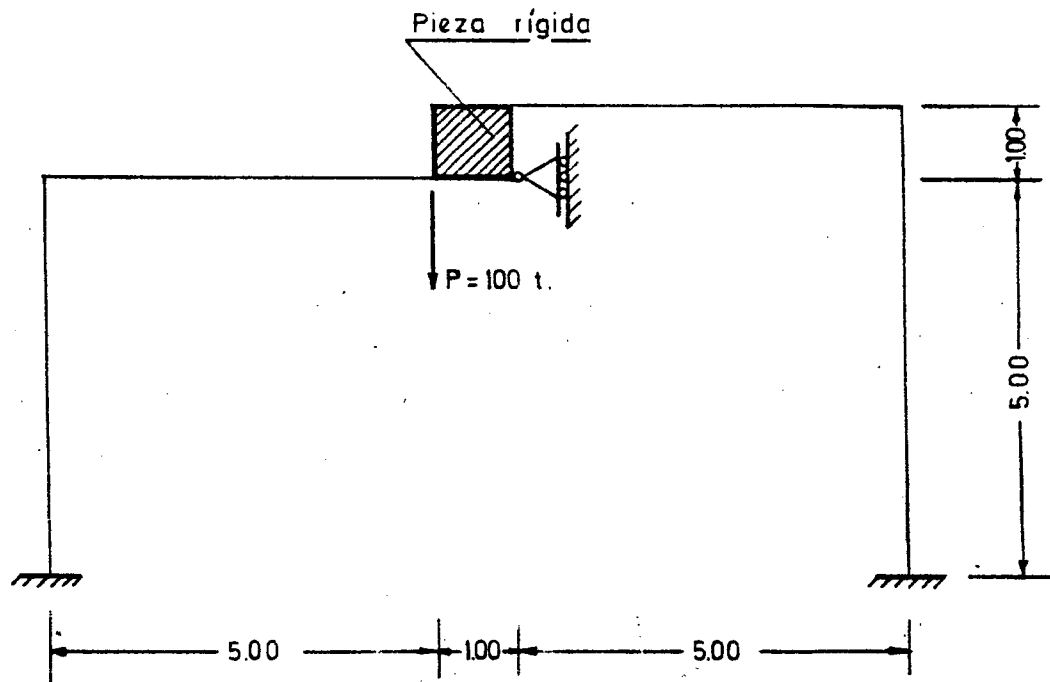


Fig. E5.1a

Se tomarán como nudos los expresados en la figura E5.1b.

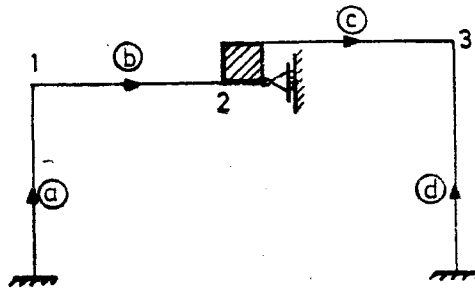


Fig. E5.1 b

Teniendo en cuenta la figura E5.1c. y planteando el equilibrio se tiene:

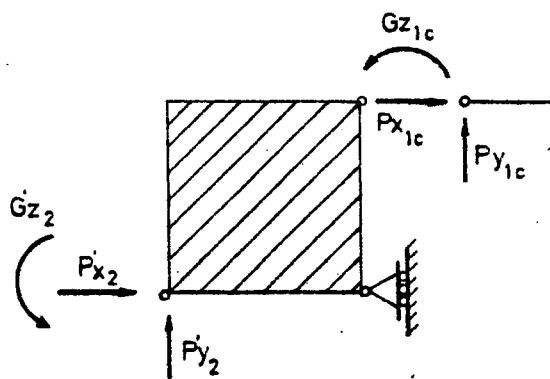


Fig. E5.1 c

$$\left. \begin{aligned} P'_{x2} &= P_{x1c} \\ P'_{y2} &= P_{y1c} \\ G'_{z2} &= G_{z1c} + P_{y1c} - P_{x1c} \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} P'_{x2} \\ P'_{y2} \\ G'_{z2} \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T_N^*} \begin{bmatrix} P_{x1c} \\ P_{y1c} \\ G_{z1c} \end{bmatrix}$$

Teniendo en cuenta la figura E5.1d. la compatibilidad se puede expresar como sigue:

$$\left. \begin{aligned} d_{x1c} &= d'_{x2} - \theta'_{z2} \cdot l \\ d_{y1c} &= d'_{y2} + \theta'_{z2} \cdot l \\ \theta_{z1c} &= \theta'_{z2} \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} d'_{x1c} \\ d'_{y1c} \\ \theta'_{z1c} \end{bmatrix} =$$

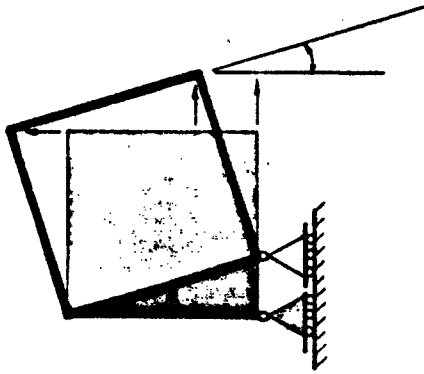


Fig. E5.1d

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{T_N^{*t}} \begin{bmatrix} d'_{x2} \\ d'_{y2} \\ \theta'_{z2} \end{bmatrix}$$

Con estas matrices de transformación se puede pasar de ejes locales a generales. Para el ensamblaje deben de observarse las relaciones.

$$P_{x1c} = \{K_{11}\}_c \cdot d_{x1c} + \{K_{12}\}_c \cdot d_{x2c} \rightarrow [P_{x1c}] = \underbrace{T_N^{*} \cdot \{K_{11}\}_c \cdot T_N^{*t}}_{\{K'_{11}\}_c} \cdot \frac{d'_2}{2} + \underbrace{T_N^{*} \{K_{12}\}_c \cdot T_c^t}_{\{K'_{12}\}_c} \cdot \frac{d'_3}{3}$$

$$K = \begin{bmatrix} \{K'_{22}\}_a + & & \\ \{K'_{11}\}_b & \{K'_{12}\}_b & 0 \\ \{K'_{12}\}_b & \{K'_{22}\}_b + \{K'_{11}\}_c & \{K'_{12}\}_c \\ 0 & \{K'_{21}\}_c & \{K'_{22}\}_c + \{K'_{22}\}_d \end{bmatrix}$$

$$\frac{EA}{L} = \frac{3 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 0,2}{L} \begin{cases} L=5 : 3 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 600 \cdot 10^2 \\ L=6 : 10^6 \cdot 0,5 \cdot 0,1 = 500 \cdot 10^2 \end{cases}$$

$$\frac{12EI}{L^3} = \frac{12 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,5^3}{L^3} \begin{cases} L=5 : 3 \cdot 0,2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^6 = 6 \cdot 10^2 \\ L=6 : \frac{0,5^3}{36} \cdot 10^5 = 3,47 \cdot 10^2 \end{cases}$$

$$\frac{6EI}{L^2} = \frac{6 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,5^3}{L^2} \begin{cases} L=5 : 0,1 \cdot 3 \cdot 0,5 \cdot 10^4 = 15 \cdot 10^2 \\ L=6 : 0,1 \cdot 3 \cdot \frac{0,5^3}{36} \cdot 10^6 = 10,4 \cdot 10^2 \end{cases}$$

$$\frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,5^3}{L} \begin{cases} L=5 : 0,2 \cdot 0,25 \cdot 10^5 = 50 \cdot 10^2 \\ L=6 : \frac{0,5^3}{3} \cdot 10^5 = 41,7 \cdot 10^2 \end{cases}$$

$$\frac{2EI}{L} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0,2 \cdot 0,5^3}{L} \begin{cases} L=5 \rightarrow = 25 \cdot 10^2 \\ L=6 \rightarrow = 20,8 \cdot 10^2 \end{cases}$$

$$\{K'_{22}\}_a = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -15 \\ 0 & -15 & 50 \end{bmatrix} \quad \{K'_{22}\}_a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{K_{22}\}_a \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & 15 \\ 0 & 600 & 0 \\ 15 & 0 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\{K'_{11}\}_b = \{K_{11}\}_b = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 15 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\{K'_{12}\}_b = \{K_{12}\}_b = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} -600 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 15 \\ 0 & -15 & 25 \end{bmatrix}$$

$$\{K'_{21}\}_b = \{K_{21}\}_b = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} -600 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -15 \\ 0 & 15 & 25 \end{bmatrix};$$

$$\{K_{22}\}_b = \{K_{22}\}_b = 10^2 \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -15 \\ 0 & -15 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\{K_{11}\}_c = 10^2 \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 15 \\ 0 & 15 & 50 \end{bmatrix} ;$$

$$\{K_{11}\}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \{K_{11}\}_c \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 600 & 0 & -600 \\ 0 & 6 & 21 \\ -600 & 21 & 686 \end{bmatrix}$$

$$\{K_{12}\}_c = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} -600 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 15 \\ 0 & -15 & 25 \end{bmatrix} ;$$

$$\{K_{12}\}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \{K_{12}\}_c \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} -600 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 15 \\ 600 & -21 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\{K_{21}\}_c = 10^2 \begin{bmatrix} -600 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -15 \\ 0 & 15 & 25 \end{bmatrix} ;$$

$$\{K_{21}\}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{K_{21}\}_c \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} -600 & 0 & 600 \\ 0 & -6 & -21 \\ 0 & 15 & 40 \end{bmatrix}$$

$$\{K_{22}\}_c = \{K_{22}\}_c = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -15 \\ 0 & -15 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\{K_{22}\}_d = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 500 & 0 & 0 \\ 0 & 3,47 & -10,4 \\ 0 & -10,4 & 41,7 \end{bmatrix} ;$$

$$\{K'_{22}\}_d = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{K_{22}\}_d \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 3,47 & 0 & 10,4 \\ 0 & 500 & 0 \\ 10,4 & 0 & 41,7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{P_1=0} \\ 0 \\ -100 \\ 0 \\ \underline{P_3=0} \end{bmatrix} = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 606 & 0 & 15 & -600 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 606 & 15 & 0 & -6 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 15 & 100 & 0 & -15 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ -600 & 0 & 0 & 1200+K & 0 & -600 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -15 & 0 & 12 & 6 & 0 & -6 & 15 \\ 0 & 15 & 25 & -600 & 6 & 736 & 600 & -21 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & -600 & 0 & 600 & 603,5 & 0 & 10,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -21 & 0 & 506 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 40 & 10,4 & -15 & 91,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{d_1} \\ d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_{z2} \\ \underline{d_3} \end{bmatrix}$$

Aplicando condensación estática:

$$\begin{aligned} 0 &= K_{11} \underline{d_1} + K_{12} \underline{d_2} \rightarrow \underline{d_1} = -K_{11}^{-1} K_{12} \underline{d_2} \\ 0 &= K_{32} \underline{d_2} + K_{33} \underline{d_3} \rightarrow \underline{d_3} = -K_{33}^{-1} K_{32} \underline{d_2} \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \underline{P_2} &= \{-K_{21} K_{11}^{-1} K_{12} + K_{22} - K_{23} K_{33}^{-1} K_{32}\} \underline{d_2} \end{aligned} \right.$$

En lugar de utilizar la constante K para introducir las condiciones de contorno, es mejor modificar la matriz de rigidez ( $d_{x2}=0$ ):

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 606 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 606 & 15 & 0 & -6 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 15 & 100 & 0 & -15 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -15 & 0 & 12 & 6 & 0 & -6 & 15 \\ 0 & 15 & 25 & 0 & 6 & 736 & 600 & -21 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 600 & 603,5 & 0 & 10,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -21 & 0 & 506 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 40 & 10,4 & -15 & 91,7 \end{bmatrix}$$



$$K_{11}^{-1} = \frac{1}{60150} \begin{bmatrix} 99,63 & 0,37 & -15 \\ 0,37 & 99,63 & -15 \\ -15 & -15 & 606 \end{bmatrix}; -K_{21} \cdot K_{11}^{-1} \cdot K_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,2816 & 3,833 \\ 0 & 3,833 & -6,48 \end{bmatrix}$$

$$K_{33}^{-1} = \frac{1}{46084,5} \begin{bmatrix} 76,51 & -0,258 & -8,72 \\ -0,258 & 91,52 & 15 \\ -8,72 & 15 & 506 \end{bmatrix}; -K_{23} \cdot K_{33}^{-1} \cdot K_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2,483 & -4,975 \\ 0 & -4,975 & -606,65 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{bmatrix} = 10^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7,235 & 4,86 \\ 0 & 4,86 & 122,87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{x2} \\ d_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} d_{x2}=0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,235 & 4,86 \\ 4,86 & 122,87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{y2} \\ \theta_{z2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 7,235d_{y2} + 4,86\theta_{z2} &= -1 \\ 4,86d_{y2} + 122,87\theta_{z2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{aligned} d_{x2} &= 0 \\ d_{y2} &= -14,2 \text{ cm.} \\ \theta_{z2} &= 0,00562 \text{ rd.} \end{aligned}$$

$$d_1 = -K_{11}^{-1} K_{12} d_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0,0037 & 0,00614 \\ 0 & 0,0062 & -0,0186 \\ 0 & 0,1496 & -0,2481 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,142 \\ 0,00562 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,006 \\ -0,001 \\ -0,0227 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} d_{x1} &= 6,0 \text{ mm.} \\ d_{y1} &= -1,0 \text{ mm.} \\ \theta_{z1} &= -0,0227 \text{ rd.} \end{aligned}$$

$$d_3 = -K_{33}^{-1} K_{32} d_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,0028 & -0,9887 \\ 0 & 0,007 & 0,032 \\ 0 & -0,1627 & -0,3188 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0142 \\ 0,00562 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,006 \\ -0,0008 \\ 0,0213 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} d_{x3} &= -6,0 \text{ mm.} \\ d_{y3} &= -0,8 \text{ mm.} \\ \theta_{z3} &= 0,0213 \text{ rd.} \end{aligned}$$

$$d_{1c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0,0142 \\ -0,00562 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0056 \\ -0,1364 \\ 0,0056 \end{bmatrix}$$

$$d_{x1c} = -5,6 \text{ mm.}$$

$$d_{y1c} = -13,64 \text{ cm.}$$

$$\theta_{1c} = 0,0056 \text{ rd.}$$

Ejercicio E9.1.

Determinar las funciones de forma de los elementos con continuidad  $C^0$ , de tipo rectangular de la figura E9.1a.

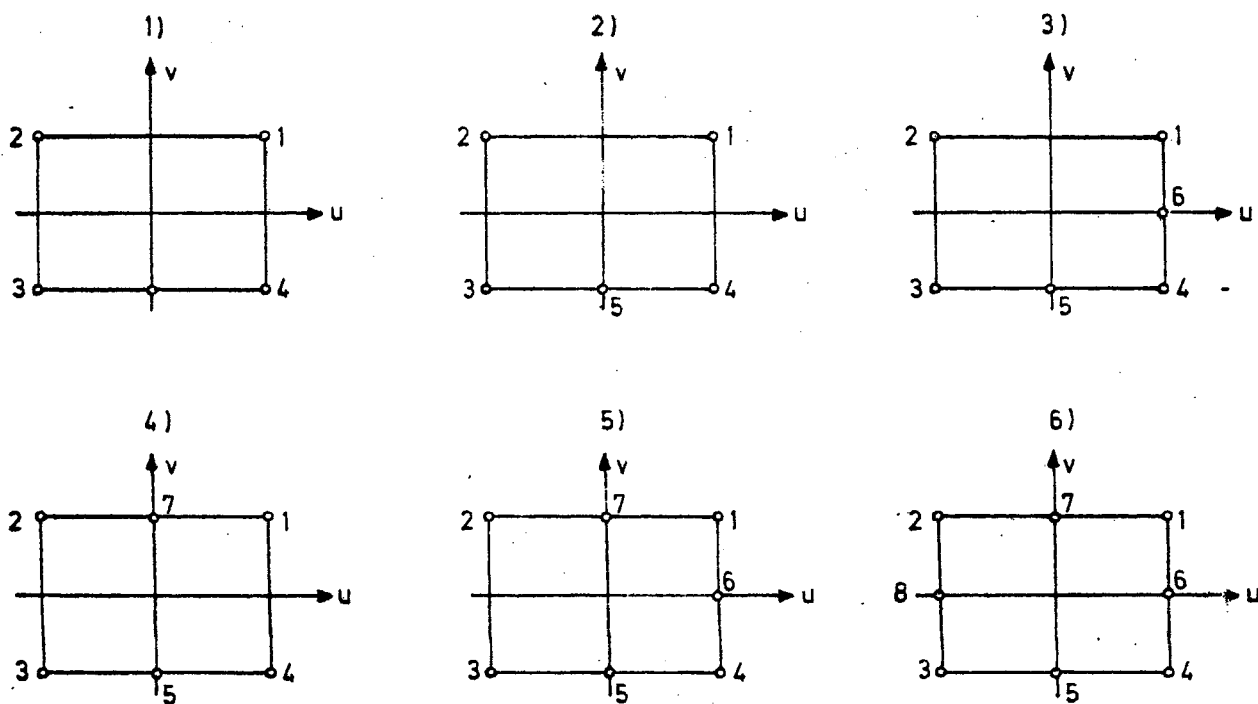


Fig. E9.1a

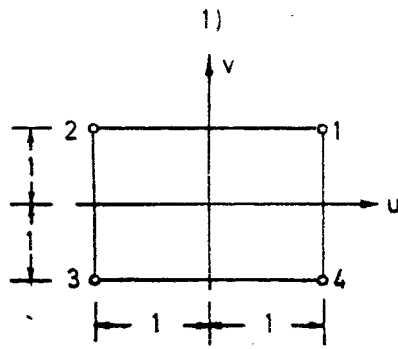


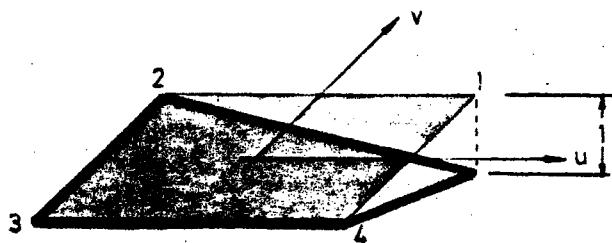
Fig. E9.1b

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v)$$

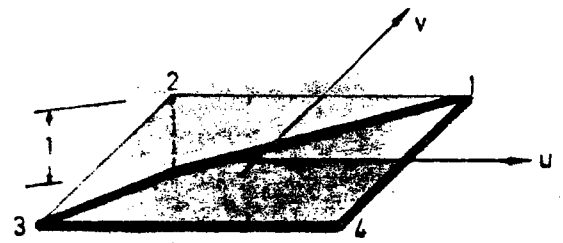
$$N_2 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-u)(1-v)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+u)(1-v)$$



$$N_1 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v)$$



$$N_2 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v)$$

Fig. E9.1c

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v)$$

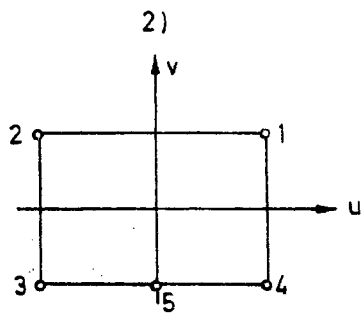


Fig. E9.1d

Para el nudo 5(0,-1), los valores de las funciones de forma anteriores son:

$$N_1^5 = 0, N_2^5 = 0, N_3^5 = \frac{1}{2} \text{ y } N_4^5 = \frac{1}{2}$$

La función de forma  $N_5$  es:  $N_5 = 1 - u^2$ , por lo tanto las nuevas funciones de forma son:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v) - N_1^5 \quad N_5 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v) - N_2^5 \quad N_5 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-u)(1-v) - N_3^5 \quad N_5 = \frac{1}{4}(1-u)(1-v) - \frac{1}{2}(1-u^2) = -\frac{1}{4}(1-u)(1+2u+v)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+u)(1-v) - N_4^5 \quad N_5 = \frac{1}{4}(1+u)(1-v) - \frac{1}{2}(1-u^2) = -\frac{1}{4}(1+u)(1-2u+v)$$

$$N_5 = 1 - u^2$$

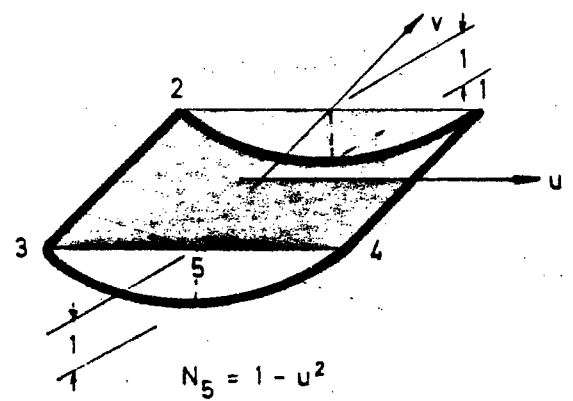
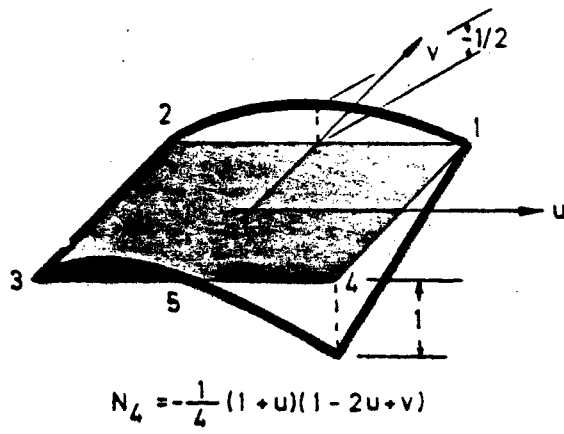


Fig. E9.1e

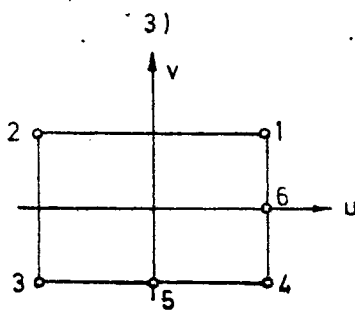


Fig. E9.1f

Para el nudo 6(1,0), los valores de la función de forma anteriores son:

$$N_1^6 = \frac{1}{2}, \quad N_2^6 = 0, \quad N_3^6 = 0, \quad N_4^6 = \frac{1}{2}, \quad N_5^6 = 0$$

La función de forma nueva  $N_6$ , es:  $N_6 = 1 - v^2$ , por lo que se obtienen las nuevas funciones de forma:



$$N_1 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v) - N_1^7 \quad N_7 = \frac{1}{4}(1+u)(1+v) - \frac{1}{4}(1-u^2)(1+v) = \frac{1}{4}u(1+u)(1+v)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v) - N_2^7 \quad N_7 = \frac{1}{4}(1-u)(1+v) - \frac{1}{4}(1-u^2)(1+v) - \frac{1}{4}u(1-u)(1+v) = -\frac{1}{4}u(1-u)(1-v)$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}(1-u)(1+2u+v) - N_3^7 \quad N_7 = -\frac{1}{4}(1-u)(1+2u+v) + \frac{1}{4}(1-u^2)(1+v) = -\frac{1}{4}u(1-u)(1-v)$$

$$N_4 = -\frac{1}{4}(1+u)(1-2u+v) - N_4^7 \quad N_7 = -\frac{1}{4}(1+u)(1-2u+v) + \frac{1}{4}(1-u^2)(1+v) = \frac{1}{4}u(1+u)(1-v)$$

$$N_5 = 1-u^2 - N_5^7 \quad N_7 = 1-u^2 - \frac{1}{2}(1-u^2)(1+v) = \frac{1}{2}(1-u^2)(1-v)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1+v)$$

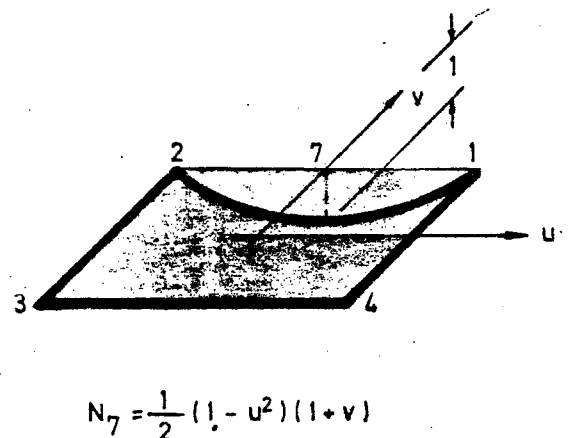
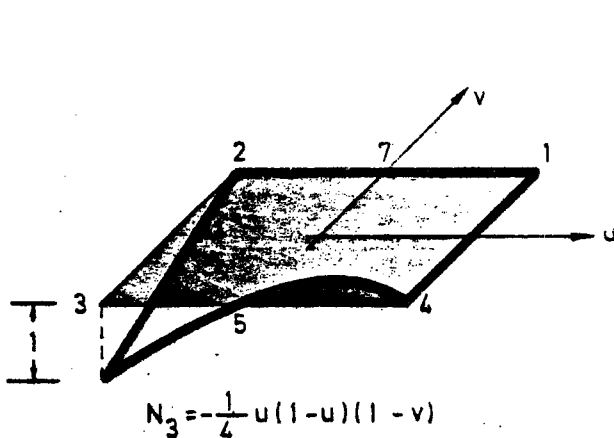


Fig E9.1i

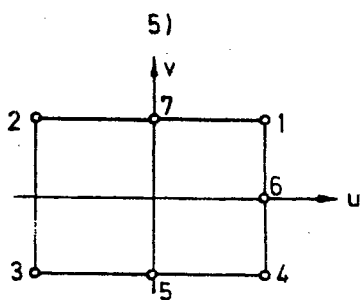


Fig. E9.1j

Para el nudo 6(1,0), los valores de las funciones de forma anteriores son:

$$N_1^6 = \frac{1}{2} ; N_2^6 = 0 ; N_3^6 = 0 ; N_4^6 = \frac{1}{2} ; N_5^6 = 0 ; N_7^6 = 0$$

La función de forma nueva  $N_6$  es:  $N_6 = 1-v^2$ ,

por lo tanto las nuevas funciones de forma son:

$$N_1 = \frac{1}{4}u(1+u)(1+v) - N_1^6 \quad N_6 = \frac{1}{4}u(1+u)(1+v) - \frac{1}{2}(1-v^2) = \frac{1}{4}(1+v)(u+u^2-2+2v)$$

$$N_2 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1+v) - N_2^6 \quad N_6 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1+v)$$

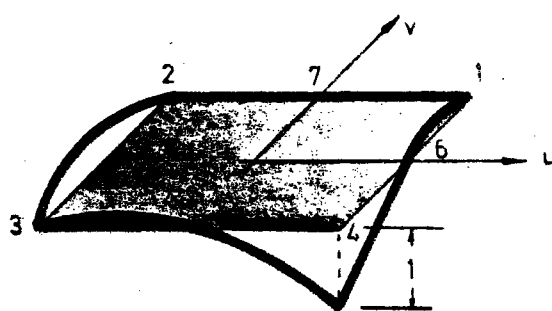
$$N_3 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1-v) - N_3^6 \quad N_6 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1-v)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}u(1+u)(1-v) - N_4^6 \quad N_6 = \frac{1}{4}u(1+u)(1-v) - \frac{1}{2}(1-v^2) = \frac{1}{4}(1-v)(u+u^2-2-2v)$$

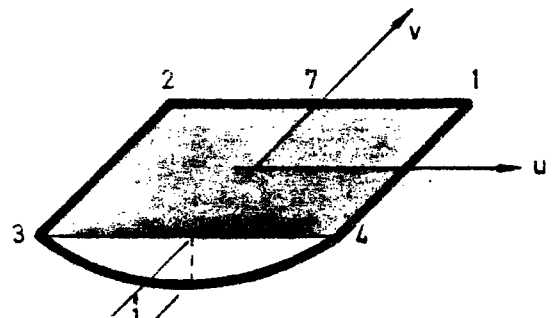
$$N_5 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1-v) - N_5^6 \quad N_6 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1-v)$$

$$N_6 = 1-v^2$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1+v)$$



$$N_4 = \frac{1}{4}(1-v)(u+u^2-2-2v)$$



$$N_5 = \frac{1}{2}(1-u)(1-v)$$

Fig. E9.1 k

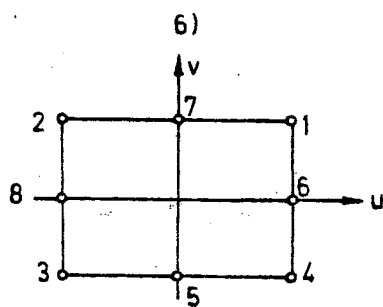


Fig. E9.1 l

Para el nudo 8(-1,0), los valores de las anteriores funciones de forma son:

$$N_1^8 = -\frac{1}{2} ; N_2^8 = \frac{1}{2} ; N_3^8 = \frac{1}{2} ; N_4^8 = -\frac{1}{2} ; N_5^8 = 0 ;$$

$$N_6^8 = 1 ; N_7^8 = 0$$

La función de forma nueva  $N_8$  es:

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-u)(1-v^2)$$



$$N_1 = \frac{1}{4}(1+v)(u+u^2-2+2v) - N_1^8 N_8 = \frac{1}{4}(1+v)(u+u^2-2+2v) + \frac{1}{4}(1-u)(1-v^2) =$$

$$\frac{1}{4}(1+v)(u^2-1+v+uv) = \frac{1}{4}(1+v)(1+u)(u+v-1)$$

$$N_2 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1+v) - N_2^8 N_8 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1+v) - \frac{1}{4}(1-u)(1-v^2) = -\frac{1}{4}(1-u)(1+v)(u-v+1)$$

$$N_3 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1-v) - N_3^8 N_8 = -\frac{1}{4}u(1-u)(1-v) - \frac{1}{4}(1-u)(1-v^2) = -\frac{1}{4}(1-u)(1+v)(u+v+1)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-v)(u+u^2-2-2v) - N_4^8 N_8 = \frac{1}{4}(1-v)(u+u^2-2-2v) + \frac{1}{4}(1-u)(1-v^2) =$$

$$\frac{1}{4}(1-v)(u^2-1-v-uv) = \frac{1}{4}(1-v)(u+1)(u-v-1)$$

$$N_5 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1-v)$$

$$N_6 = 1-v^2 - \frac{1}{2}(1-u)(1-v^2) = \frac{1}{2}(1+u)(1-v^2)$$

$$N_7 = \frac{1}{2}(1-u^2)(1+v)$$

$$N_8 = \frac{1}{2}(1-u)(1-v^2)$$

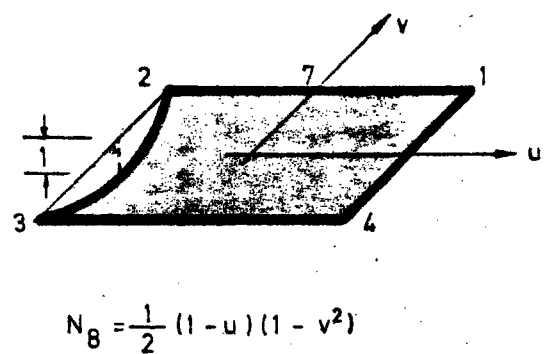
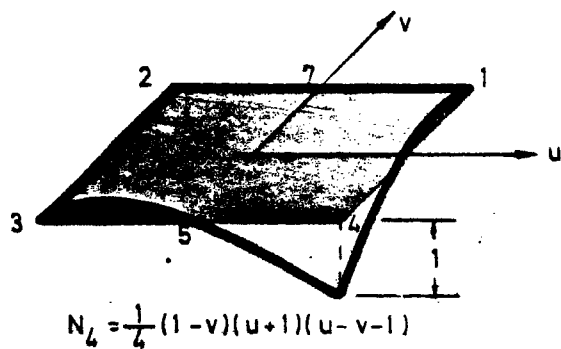


Fig. E9.1m

Ejercicio E9.2.

Determinar las funciones de forma de los elementos con continuidad  $C^0$ , de tipo triangular de la figura E9.2a. Utilizar coordenadas naturales o triangulares.

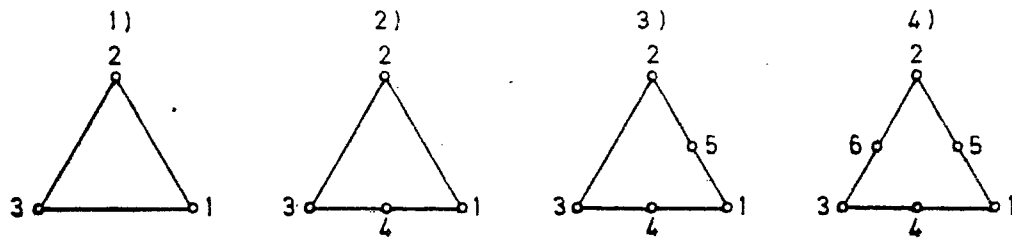


Fig. E9. 2a

1) Las funciones de forma son:

$$N_1 = L_1$$

$$N_2 = L_2$$

$$N_3 = L_3$$

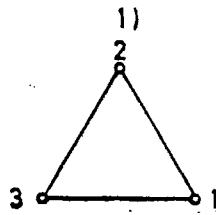


Fig. E9. 2 b

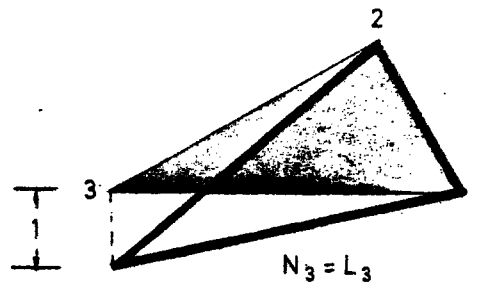


Fig. E9. 2 c

2)

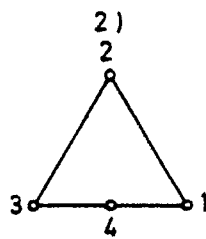


Fig. E9. 2 d

Para el nudo  
4(1/2,0,1/2), los  
valores de las  
funciones de for  
ma anteriores son:  
 $N_1^4 = \frac{1}{2}$  ;  $N_2^4 = 0$  ;  $N_3^4 = \frac{1}{2}$

La nueva función  
de forma  $N_4$ , es:

$$N_4 = 4 L_1 L_3$$

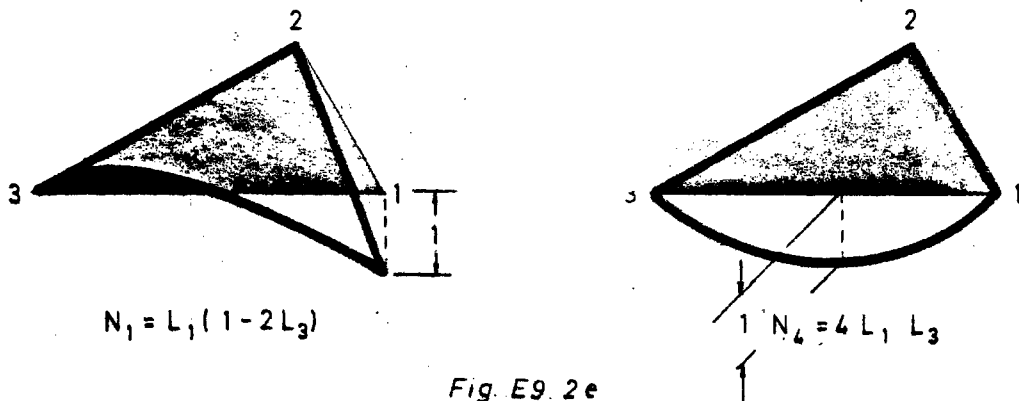
Por lo tanto

$$N_1 = L_1 - N_1^4 \quad N_4 = L_1 - 2L_1L_3 = L_1(1-2L_3)$$

$$N_2 = L_2 - N_2^4 \quad N_4 = L_2$$

$$N_3 = L_3 - N_3^4 \quad N_4 = L_3 - 2L_1L_3 = L_3(1-2L_1)$$

$$N_4 = 4L_1L_3$$



Para el nudo 5 ( $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ ), los valores de las anteriores funciones de forma, son:

$$N_1^5 = \frac{1}{2} ; N_2^5 = \frac{1}{2} ; N_3^5 = 0 ; N_4^5 = 0$$

La nueva función de forma  $N_5$ , es:

$$N_5 = 4L_1L_2$$

Por lo tanto:

$$N_1 = L_1(1-2L_3) - N_1^5 \quad N_5 = L_1(1-2L_3) \cdot 2L_1L_2 = L_1(1-2L_2 \cdot 2L_3)$$

$$N_2 = L_2 - N_2^5 \quad N_5 = L_2 - 2L_1L_2 = L_2(1-2L_1)$$

$$N_3 = L_3(1-2L_1)$$

$$N_4 = 4L_1L_3$$

$$N_5 = 4L_1L_2$$

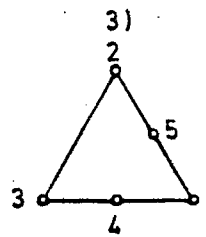
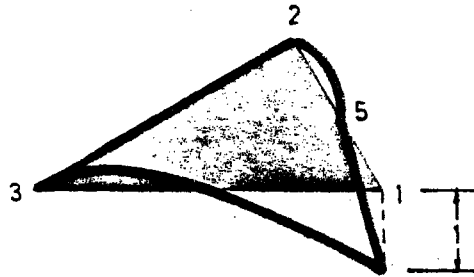


Fig. E9. 2f



$$N_1 = L_1(1 - 2L_2 - 2L_3)$$

Fig. E9. 2g

4)

$$N_1 = L_1(1 - 2L_2 - 2L_3)$$

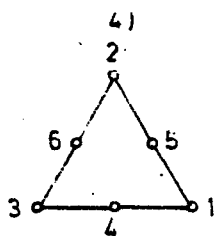


Fig. E9. 2h

Para el nudo 6(0, 1/2, 1/2), los valores de las anteriores funciones de forma son:

$$N_1^6 = 0 ; N_2^6 = \frac{1}{2} ; N_3^6 = \frac{1}{2} ; N_4^6 = 0 ; N_5^6 = 0$$

la nueva función de forma  $N_6$ , es:  $N_6 = 4L_2L_3$

Por lo tanto:

$$N_1 = L_1(1 - 2L_2 - 2L_3)$$

$$N_2 = L_2(1 - 2L_1) - N_2^6 \quad N_6 = L_2(1 - 2L_1) - 2L_2L_3 = L_2(1 - 2L_1 - 2L_3)$$

$$N_3 = L_3(1 - 2L_1) - N_3^6 \quad N_6 = L_3(1 - 2L_1) - 2L_2L_3 = L_3(1 - 2L_1 - 2L_2)$$

$$N_4 = 4L_1L_3$$

$$N_5 = 4L_1L_2$$

$$N_6 = 4L_2L_3$$

Ejercicio E9.3.

A) Deducir los polinomios de Lagrange de orden 1, 2 y 3.

B) Aplicación a la obtención de las funciones de forma de los elementos finitos triángulares  $C^0$ .

C) Comprobar en el elemento triangular de elasticidad plana los requerimientos de convergencia.

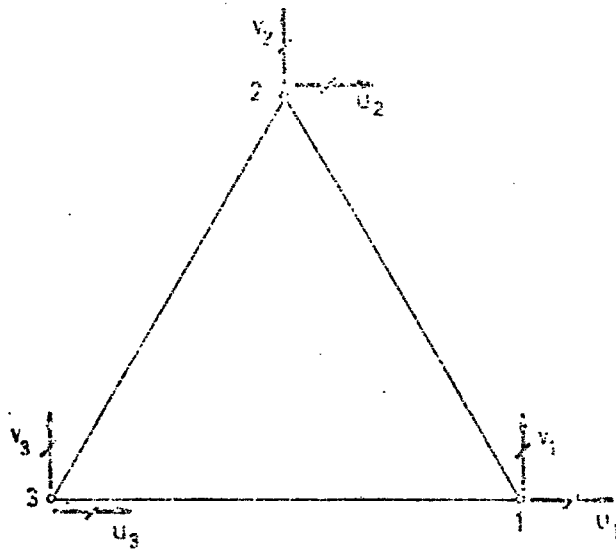


Fig.E9. 3a

A) Una función polinómica de grado  $n$ ,  $f(x)$  que toma los valores  $f_i$  para  $x=x_i$ , con  $i=1,2,\dots,n$ , es:

$$f(x) = \sum_{i=0}^n p_i^n(x) f(x_i)$$

siendo:

donde:

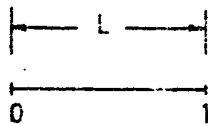
$$p_i^n(x) = \frac{p_i^n(x)}{p_i^n(x_i)}$$

$$p_i^n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x-x_i)}$$

Si los puntos  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  están a intervalos iguales, en un intervalo  $L$  se obtiene con  $x_i = \frac{L}{n}$ .

1) 1er orden (lineal)

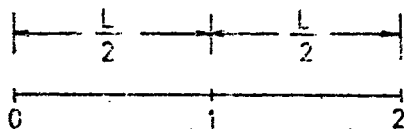
$$p_0^1(x) = 1 - \frac{x}{L} = p_0^1$$



$$p_1^1(x) = \frac{x}{L} = p_1^1$$

Fig. E9.3b

2) 2º orden (cuadrático)



$$p_0^2(x) = (2\frac{x}{L}-1)(\frac{x}{L}-1) = (1-2p_1^1)p_0^1$$

$$p_1^2(x) = 4\frac{x}{L}(1-\frac{x}{L}) = 4p_0^1p_0^1$$

$$p_2^2(x) = \frac{x}{L}(2\frac{x}{L}-1) = p_1^1(2p_1^1-1)$$

Fig. E9.3c

3) 3er orden (cúbico)

$$p_0^3(x) = \frac{1}{2}(1-\frac{3x}{L})(2-\frac{3x}{L})(1-\frac{x}{L}) = \frac{1}{2}(1-3p_1^1)p_0^1$$

$$p_1^3(x) = \frac{9}{2}\frac{x}{L}(3\frac{x}{L}-2)(\frac{x}{L}-1) = \frac{9}{2}p_1^1(2-3p_1^1)p_0^1$$

$$p_2^3(x) = \frac{9}{2}\frac{x}{L}(3\frac{x}{L}-1)(1-\frac{x}{L}) = \frac{9}{2}p_1^1(3p_1^1-1)p_0^1$$

$$p_3^3(x) = \frac{1}{2}\frac{x}{L}(3\frac{x}{L}-1)(3\frac{x}{L}-2) = \frac{1}{2}p_1^1(3p_1^1-1)(3p_1^1-2).$$

B). Se deduce la aplicación pedida de la tabla siguiente:

Polinomio de Lagrange. Función de forma:

1) Líneal

$$\begin{aligned} p_0^1 & N_1 = L_1 \\ p_1^1 & N_2 = L_2 \\ & N_3 = L_3 \end{aligned}$$

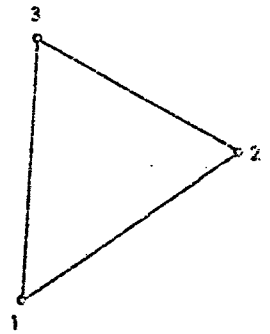


Fig. E9.3 d

2) Cuadrático

$$\begin{aligned} p_0^2 &= (1-2p_1^1)p_0^1 & N_1 &= (2L_1-1)L_1 \\ p_1^2 &= 4p_0^1p_1^1 & N_2 &= (2L_2-1)L_2 \\ p_2^2 &= (2p_1^1-1)p_1^1 & N_3 &= (2L_3-1)L_3 \end{aligned}$$

Puntos medios de lados

$$\begin{aligned} N_4 &= 4L_1L_2 \\ N_5 &= 4L_2L_3 \\ N_6 &= 4L_3L_1 \end{aligned}$$

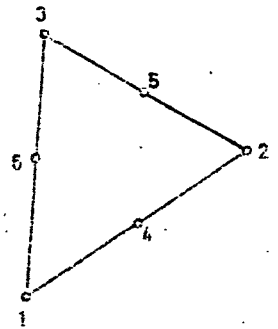


Fig. E9.3 e

3) Cúbico

$$\begin{aligned} p_0^3 &= \frac{1}{2}(3p_1^1-1)(3p_1^1-2)p_0^1 & N_1 &= \frac{1}{2}(3L_1-1)(3L_1-1)L_1 \\ p_1^3 &= \frac{9}{2}p_1^1(3p_0^1-1)p_0^1 & N_2 &= \frac{1}{2}(3L_2-1)(3L_2-1)L_2 \\ p_2^3 &= \frac{9}{2}p_1^1(3p_1^1-1)p_0^1 & N_3 &= \frac{1}{2}(3L_3-1)(3L_3-1)L_3 \\ p_3^3 &= \frac{1}{2}p_1^1(3p_1^1-1)(3p_1^2-2) \end{aligned}$$

Puntos en lados

$$\begin{aligned} N_4 &= \frac{9}{2}L_1L_2(3L_1-1) \\ N_5 &= \frac{9}{2}L_1L_2(3L_2-1) \\ N_6 &= \frac{9}{2}L_2L_3(3L_2-1) \\ N_7 &= \frac{9}{2}L_2L_3(3L_3-1) \\ N_8 &= \frac{9}{2}L_3L_1(3L_3-1) \\ N_9 &= \frac{9}{2}L_3L_1(3L_1-1) \end{aligned}$$

Nudo interior

$$N_{10} = 27L_1L_2L_3$$

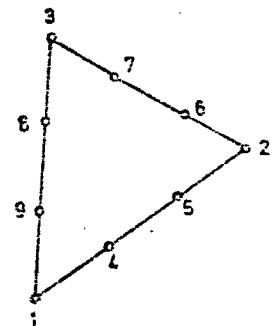


Fig. E9.3 f

Para este nudo interior no existe comparación directa con Lagrange.



$$c). \quad u = (N_1, N_2, N_3, \dots, N_6) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$$

$$v = (N_1, N_2, N_3, \dots, N_6) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix}$$

Los requerimientos en convergencia son:

- 1) Movimientos de sólido rígido
  - a)  $u(x) = \text{constante} = u_0$
  - b)  $u(x) = -\theta_0 y$
  - c)  $v(x) = v_0$
  - d)  $v(x) = \theta_0 x$ .

Por lo tanto a)  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = u_0$   
 lo que implica  $u(x) = (N_1, N_2, N_3, \dots, N_6) \begin{bmatrix} u_0 \\ u_0 \\ u_0 \\ u_0 \\ u_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = u_0 \sum_{i=1}^6 N_i = u_0$

Es decir  $\sum_{i=1}^6 N_i = 1$

b)  $v_1 = v_2 = \dots = v_i = v_0$  Análogamente se deduce

$\sum_{i=1}^6 N_i = 1$

c)  $u_1 = -\theta_0 y_1, u_2 = -\theta_0 y_2, \dots, u_6 = -\theta_0 y_6$

Por lo tanto

$y = \sum_{i=1}^6 N_i y_i$

d)  $v_1 = \theta_0 x_1, v_2 = \theta_0 x_2, \dots, v_6 = \theta_0 x_6$

es decir  $x = \sum_{i=1}^6 N_i x_i$

A continuación se comprueban las igualdades anteriores ( $L_1 + L_2 + L_3 = 1$ ):

$$1 = \sum_{i=1}^6 N_i = \sum_{i=1}^3 (2L_i - 1)L_i + 4 \sum_{i=1}^3 L_i L_j = 2L_1^2 + 2L_2^2 + 2L_3^2 - (L_1 + L_2 + L_3) + 4(L_1 L_2 + L_2 L_3 + L_3 L_1) = 2(L_1 - L_2 + L_3)^2 - 1 = 1$$

$$y = \sum_{i=1}^6 N_i y_i \quad \text{con} \quad y_4 = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad y_5 = \frac{y_2 + y_3}{2} \quad y_6 = \frac{y_3 + y_1}{2}$$

es decir:

$$y = \sum_{i=1}^3 (2L_i - 1)L_i y_i + 2L_1 L_2 (y_1 + y_2) + 2L_2 L_3 (y_2 + y_3) + 2L_3 L_1 (y_1 + y_3)$$

$$y = (2L_1^2 - L_1 + 2L_1 L_3 + 2L_1 L_2) y_1 + (2L_2^2 - L_2 + 2L_2 L_1 + 2L_2 L_3) y_2 + (2L_3^2 - L_3 + 2L_3 L_2 + 2L_3 L_1) y_3 = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 = y$$

Análogamente se cumple:

$$x = \sum N_i x_i$$

## 2) Movimientos de deformación constante

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = a \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = b \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = c \quad (a, b, c, \text{ constantes})$$

$$u = ax + \psi_1(y) \quad v = by + \psi_2(x)$$

$$\psi_1'(y) + \psi_2'(x) = c, \text{ luego } \psi_1'(y) = \text{constante} \quad \psi_2'(x) = \text{constante}$$

La expresión de los desplazamientos es:

$$u = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1$$

$$v = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2$$

Los valores nodales son  $u_1 = \alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1, u_2 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1, \dots$

$$u_6 = \alpha_1 x_6 + \beta_1 y_6 + \gamma_1$$

Sustituido en la expresión de  $u = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}$  se obtiene

$$u = \sum_{i=1}^6 N_i u_i = \sum_{i=1}^6 N_i (\alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2 + \gamma_1) = \alpha_1 \sum_{i=1}^6 N_i x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^6 N_i y_i + \gamma_1 \sum_{i=1}^6 N_i =$$

$$= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 \text{ como se quería demostrar}$$

$$\text{Análogamente se cumple } v = \sum_{i=1}^6 N_i v_i$$

2). La continuidad  $C^0$  se satisface obviamente en los nudos. A lo largo de un lado, las funciones de forma son cuadráticas y están definidos por tres valores. Luego el elemento es conforme.

Ejercicio E10.1.

El elemento finito no conforme de flexión (hipoelemento) de la figura E10.1a. tiene un campo de desplazamientos que puede suponerse aproximado por una ley parabólica de segundo grado.

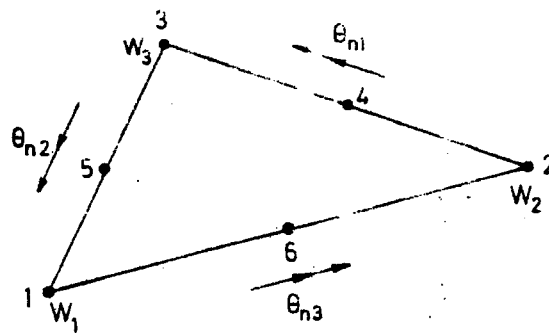


Fig. E10.1a

Se pide:

- 1) Determinar la matriz de rigidez.
- 2) Para una carga vertical uniforme en todo el elemento, hallar las cargas equivalentes en los nudos.

1) Se supone la expresión de la flecha  $w$  parabólica, es decir, en coordenadas triangulares se tiene:

$$w = \alpha_1 L_1^2 + \alpha_2 L_2^2 + \alpha_3 L_3^2 + 2\beta_1 L_2 L_3 + 2\beta_2 L_1 L_3 + 2\beta_3 L_1 L_2 \quad \{E10.1a.\}$$

Se formularán las ecuaciones que siguen en un nudo. En los restantes se obtendrán mediante permutación circular  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ .

Los coeficientes  $\alpha_i$  se determinan al imponer la condición de flecha para el nudo  $i$ . Resulta para el nudo 1(1,0,0),  $\alpha_1 = w_1$ . Por lo tanto:

$$\alpha_1 = w_1 ; \alpha_2 = w_2 \quad \text{y} \quad \alpha_3 = w_3$$

Para calcular los coeficientes  $\beta$ , es preciso conocer antes la expresión de la derivada según la normal a un lado.

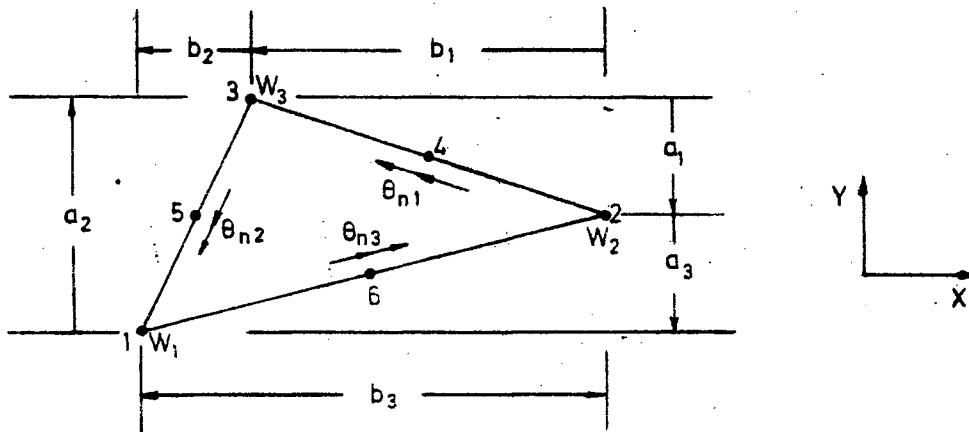


Fig E10.1b

Las fórmulas de transformación de coordenadas son:  
(ver figura E10.1b.)

$$L_1 = (a_1 x + b_1 y + c_1) \frac{1}{2A} \quad \text{y análogas}$$

con  $a_1 = y_2 - y_3$

$b_1 = x_3 - x_2$

$c_1 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)$

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \text{área del triángulo 123}$$

Entonces:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = (a_1 \frac{\partial w}{\partial L_1} + a_2 \frac{\partial w}{\partial L_2} + a_3 \frac{\partial w}{\partial L_3}) \frac{1}{2A}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = (b_1 \frac{\partial w}{\partial L_1} + b_2 \frac{\partial w}{\partial L_2} + b_3 \frac{\partial w}{\partial L_3}) \frac{1}{2A}$$

Sea  $\alpha_3$  el ángulo que forma el vector lado  $\overline{12}$  en el eje positivo de abscisas x. Su valor es:

$$\cos \alpha_3 = \frac{b_3}{m_3} ; \quad \sin \alpha_3 = \frac{-a_3}{m_3} \quad \text{con} \quad m_3 = (a_3^2 + b_3^2)^{1/2} > 0$$

los cosenos directores de la normal (dirigida hacia el interior del triángulo) son:

$$\frac{a_3}{m_3}, \quad \frac{b_3}{m_3}$$

Por lo tanto la derivada según dicha normal es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial n_3} &= \frac{a_3}{m_3} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{b_3}{m_3} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{2A} \left( \frac{a_1 a_3 + b_1 b_3}{m_3} \frac{\partial w}{\partial L_1} + \frac{a_2 a_3 + b_2 b_3}{m_3} \frac{\partial w}{\partial L_2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_3^2 + b_3^2}{m_3} \frac{\partial w}{\partial L_3} \right) \end{aligned}$$

es decir:

$$\frac{\partial w}{\partial n_3} = \frac{m_3}{2A} (d_3 \frac{\partial w}{\partial L_1} + e_3 \frac{\partial w}{\partial L_2} + \frac{\partial w}{\partial L_3}) = h_3^{-1} (d_3 \frac{\partial w}{\partial L_1} + e_3 \frac{\partial w}{\partial L_2} + \frac{\partial w}{\partial L_3}) \quad \{E10.1b.\}$$

con

$$d_3 = \frac{a_3 a_1 + b_3 b_1}{m_3^2} ; \quad e_3 = \frac{a_3 a_2 + b_3 b_2}{m_3^2} \quad \text{y} \quad h_3 L_3 = 2A.$$

$h_3$  es la altura del triángulo que parte del nudo 3.

Las derivadas de la flecha  $w$  respecto a las coordenadas triangulares son:

$$\frac{\partial w}{\partial L_1} = 2(\alpha_1 L_1 + \beta_2 L_3 + \beta_3 L_2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial L_2} = 2(\alpha_2 L_2 + \beta_1 L_3 + \beta_3 L_1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial L_3} = 2(\alpha_3 L_3 + \beta_2 L_1 + \beta_1 L_2)$$

Al particularizar para el punto  $6(1/2, 1/2, 0)$  resulta:

$$\frac{\partial w}{\partial L_1} = \alpha_1 + \beta_3 \quad \frac{\partial w}{\partial L_2} = \alpha_2 + \beta_3 \quad \frac{\partial w}{\partial L_3} = \beta_1 + \beta_2$$

Por lo tanto, al considerar {E10.1b.} se obtiene:

$$\frac{\partial w}{\partial n_3} \Big|_6 = \theta_{n3} \{ \alpha_1 d_3 + \alpha_2 e_3 + \beta_3 (d_3 + e_3) + \beta_1 + \beta_2 \} h_3^{-1}$$

Como  $d_3 + e_3 + 1 = 0$  se puede escribir

$$-\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = -h_3 \theta_{n3} + \alpha_1 d_3 + \alpha_2 e_3$$

Resumiendo las ecuaciones análogas en los nudos 4 y 5 se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1 \theta_{n1} \\ -h_2 \theta_{n2} \\ -h_3 \theta_{n3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & d_1 & e_1 \\ e_2 & 0 & d_2 \\ d_3 & e_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Sistema cuya solución es:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \theta_{n1} \\ h_2 \theta_{n2} \\ h_3 \theta_{n3} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & d_1 & e_1 \\ e_2 & 0 & d_2 \\ d_3 & e_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

o bien

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \theta_{n1} \\ h_2 \theta_{n2} \\ h_3 \theta_{n3} \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_2 + d_3 & e_3 & d_2 \\ d_3 & d_1 + e_3 & e_1 \\ e_2 & d_1 & e_1 + d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por el vector fila

$$(2L_2L_3, \quad 2L_3L_1, \quad 2L_1L_2)$$

se obtienen las funciones de forma, al sumarle al resultado la expresión  $w_1L_1^2 + w_2L_2^2 + w_3L_3^2$ . Es decir

$$N_1 = L_1^2 - (e_2 + d_3)L_2L_3 - d_3L_1L_3 - L_2L_1L_2$$

$$N_4 = (L_3L_1 + L_1L_2)h_1$$

Reduciendo se obtiene:

$$N_1 = L_1^2 - e_2L_2(1-L_2) - d_3L_3(1-L_3) = N_{w_1}$$

$$N_4 = L_1(1-e_1)h_1 = N_{\theta_{n1}}$$

Las matrices que relacionan deformaciones  $\xi = (h_{xx}, h_{yy}, h_{xy})^T$  y los movimientos son:

$$\underline{B}_1^T = (N_{1,xx} ; N_{1,yy} ; N_{1,xy})$$

$$\text{con } 2A^2 N_{1,xx} = (a_1^2 + e_2 a_2^2 + d_3 a_3^2) = \bar{a}_1$$

$$2A^2 N_{1,yy} = (b_1^2 + e_2 b_2^2 + d_3 b_3^2) = \bar{b}_1$$

$$2A^2 N_{1,xy} = (a_1 b_1 + e_2 a_2 b_2 + d_3 a_3 b_3) = \bar{c}_1$$

La matriz de rigidez se calcula a partir de la fórmula:

$$\underline{k}_{ij} = \iint_A \underline{B}_i^T \underline{D} \underline{B}_j \, dx dy$$



con  $\underline{D} = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix}$  matriz de elasticidad del material.

ortótropo de la losa.

Se obtiene por tanto:

$$k_{11} = \{ \bar{a}_1^2 D_x + 2\bar{a}_1 b_1 D_1 + \bar{b}_1^2 D_y + \bar{c}_1^2 D_{xy} \} \frac{1}{4A^3}$$

$$k_{12} = \{ \bar{a}_1 \bar{a}_2 D_x + (\bar{a}_1 \bar{b}_2 + \bar{a}_2 \bar{b}_1) D_1 + \bar{b}_1 \bar{b}_2 D_y + \bar{c}_1 \bar{c}_2 D_{xy} \} \frac{1}{4A^3}$$

$$\underline{B}_4^T = (N_{4,xx} ; N_{4,yy} ; N_{4,xy})$$

$$\text{con } N_{4,xx} = -\frac{1}{2A^2} h_1 a_1^2$$

$$N_{4,yy} = -\frac{1}{2A^2} h_1 b_1^2$$

$$N_{4,xy} = -\frac{1}{2A^2} h_1 a_1 b_1$$

Obteniéndose:

$$K_{14} = -\frac{h_1}{4A^3} \{ \bar{a}_1 a_1^2 D_x + (\bar{a}_1 b_1^2 + a_1^2 \bar{b}_1) D_1 + b_1 b_1^2 D_y + \bar{c}_1 a_1 b_1 D_{xy} \}$$

$$K_{15} = -\frac{h_2}{4A^3} \{ \bar{a}_1 a_2^2 D_x + (\bar{a}_1 b_2^2 + a_2^2 \bar{b}_1) D_1 + \bar{b}_1 b_2^2 D_y + \bar{c}_1 a_2 b_2 D_{xy} \}$$

$$K_{44} = \frac{h_1^2}{4A^3} (a_1^4 D_x + (b_1^2 a_1^2 + a_1^2 b_1^2) D_1 + b_1^4 D_y + a_1^2 b_1^2 D_{xy})$$

$$K_{45} = \frac{h_1 h_2}{4A^3} (a_1^2 a_2^2 D_x + (b_1^2 a_2^2 + a_1^2 b_2^2) D_1 + b_1^2 b_2^2 D_y + a_1 b_1 a_2 b_2 D_{xy})$$

y los demás elementos se hallan por permutación circular quedando la matriz de rigidez  $\underline{K}$  de la forma siguiente:

$$\underline{K} = \frac{1}{4A^3} \begin{bmatrix} k_{ww} & k_{w\theta} \\ k_{\theta w} & k_{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad \text{donde:}$$

$k_{ww} =$

$$\left[ \begin{array}{cc} \bar{a}_1^2 D_x + 2\bar{a}_1 \bar{b}_1 D_1 + \bar{b}_1^2 D_y & \bar{a}_1^2 \bar{a}_2^2 D_x + (\bar{a}_1 \bar{b}_2 + \bar{a}_2 \bar{b}_1) D_1 \\ + \bar{e}_1^2 D_{xy} & + \bar{b}_1 \bar{b}_2 D_y + \bar{c}_1 \bar{c}_2 D_{xy} \end{array} \quad \begin{array}{c} \bar{a}_1 \bar{a}_3 D_x + (\bar{a}_1 \bar{b}_3 + \bar{a}_3 \bar{b}_1) D_1 \\ + \bar{b}_1 \bar{b}_3 D_y + \bar{c}_1 \bar{c}_3 D_{xy} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc} \bar{a}_2^2 D_x + 2\bar{a}_2 \bar{b}_2 D_1 + & \bar{a}_2 \bar{a}_3 D_x + (\bar{a}_2 \bar{b}_3 + \bar{a}_3 \bar{b}_2) D_1 \\ + \bar{b}_2^2 D_y + \bar{e}_2^2 D_{xy} & + \bar{b}_2 \bar{b}_3 D_y + \bar{c}_2 \bar{c}_3 D_{xy} \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{cc} & \bar{a}_3^2 D_x + 2\bar{a}_3 \bar{b}_3 D_1 + \\ & + \bar{b}_3^2 D_y + \bar{e}_3^2 D_{xy} \end{array} \right]$$

Simétrica

$k_{w\theta} =$

$$\left[ \begin{array}{ccc} -h_1 (\bar{a}_1 a_1^2 D_x + (\bar{a}_1 b_1^2 + a_1^2 \bar{b}_1) D_1 + & -h_2 (\bar{a}_1 a_2^2 D_x + (\bar{a}_1 b_2^2 + a_1^2 \bar{b}_1) D_1 & -h_3 (\bar{a}_1 a_3^2 D_x + (\bar{a}_1 b_3^2 + a_1^2 \bar{b}_1) D_1 \\ + \bar{b}_1 b_1^2 D_y + \bar{c}_1 a_1 b_1 D_{xy}) & + \bar{b}_1 b_2^2 D_y + \bar{c}_1 a_2 b_2 D_{xy}) & + \bar{b}_1 b_3^2 D_y + \bar{c}_1 a_3 b_3 D_{xy}) \\ -h_1 (\bar{a}_1 a_1^2 D_x + (\bar{a}_2 b_1^2 + a_1^2 \bar{b}_2) D_1 & -h_2 (\bar{a}_2 a_2^2 D_x + (\bar{a}_2 b_2^2 + a_2^2 \bar{b}_2) D_1 & -h_3 (\bar{a}_2 a_3^2 D_x + \bar{a}_2 b_3^2 + a_3^2 \bar{b}_2) D_1 \\ + \bar{b}_2 b_1^2 D_y + \bar{c}_2 a_1 b_1 D_{xy}) & + \bar{b}_2 b_2^2 D_y + \bar{c}_2 a_2 b_2 D_{xy} & + \bar{b}_2 b_3^2 D_y + \bar{c}_2 a_3 b_3 D_{xy}) \\ -h_1 (\bar{a}_3 a_1^2 D_x + (\bar{a}_3 b_1^2 + a_1^2 \bar{b}_3) D_1 & -h_2 (\bar{a}_3 a_2^2 D_x + \bar{a}_3 b_2^2 + a_2^2 \bar{b}_3) D_1 & -h_3 (\bar{a}_3 a_3^2 D_x + \bar{a}_3 b_3^2 + a_3^2 \bar{b}_3) D_1 \\ + \bar{b}_3 b_1^2 D_y + \bar{c}_3 a_1 b_1 D_{xy}) & + \bar{b}_3 b_2^2 D_y + \bar{c}_3 a_2 b_2 D_{xy}) & + \bar{b}_3 b_3^2 D_y + \bar{c}_3 a_3 b_3 D_{xy} \end{array} \right]$$

$$k_{\theta w} = k_{w\theta}^T$$

$$k_{\theta\theta} =$$

$$\begin{bmatrix} h_1^2 (a_1^4 D_x + 2a_1^2 b_1^2 D_1 + b_1^4 D_y + a_1^2 b_1^2 D_{xy}) & h_1 h_2 (a_1^2 a_2^2 D_x + b_1^2 a_2^2 D_1 + a_1^2 b_2^2 D_1 + b_1^2 b_2^2 D_y + a_1 b_1 a_2 b_2 D_{xy}) & h_1 h_3 (a_1^2 a_3^2 D_x + b_1^2 a_3^2 D_1 + a_1^2 b_3^2 D_1 + b_1^2 b_3^2 D_y + a_1 b_1 a_3 b_3 D_{xy}) \\ h_2^2 a_2^4 D_x + 2h_2^2 a_2^2 b_2^2 D_1 + h_2^2 b_2^4 D_y + h_2^2 a_2^2 b_2^2 D_{xy} & h_2 h_3 (a_2^2 a_3^2 D_x + b_2^2 a_3^2 D_1 + a_2^2 b_3^2 D_1 + b_2^2 b_3^2 D_y + a_2 b_2 a_3 b_3 D_{xy}) \\ h_3^2 a_3^4 D_x + 2h_3^2 a_3^2 b_3^2 D_1 + h_3^2 b_3^4 D_y + h_3^2 a_3^2 b_3^2 D_{xy} \end{bmatrix}$$

Simétrica

2) Las cargas equivalentes a una carga vertical uniforme en todo el elemento es:

$$P_1 = \iint_A N_1 q \, dx dy = \frac{1 - e_2 - d_3}{6} q A$$

$$P_4 = \iint_A N_4 q \, dx dy = \frac{h_1}{6} q A$$

Se comprueba que

$$P_1 + P_2 + P_3 = \frac{3 - (e_1 + d_1 + e_2 + d_2 + e_3 + d_3)}{6} q A = \frac{6}{6} Aq = Aq$$